Problema 19

José Carlos Chávez Sandoval

August 13, 2006

He aqui la solución del problema 19 propuesto por June Lester en "Triangles III: Complex triangle functions, en Aequationes Mathematicae".

Lema 0.1. *Dado $\triangle ABC$ y un punto P y P_a, P_b, P_c las reflexiones de P en los lados de $\triangle ABC$. Sea P^* el conjugado isogonal de P con respecto a $\triangle ABC$, entonces:*

(i) P^* *es el circuncentro de* $\triangle P_aP_bP_c$.

(ii) $\overline{AP^*} \perp \overline{P_bP_c}$, $\overline{BP^*} \perp \overline{P_cP_a}$, $\overline{CP^*} \perp \overline{P_aP_b}$.

Teorema 0.2. *Los triángulos pedal de J y J' son equiláteros.*

Para demostrarlo usaremos el siguiente

Lema 0.3. *Las coordenadas tripolares de J y J' son iguales e iguales a* $(bc : ca : ab)$.

Demostración. De la definición tenemos que $\dfrac{BJ}{JC} = \dfrac{c}{b} = \lambda$ de ahi que $BJ = c\lambda$ y $JC = b\lambda$. Ademas tenemos que $\dfrac{CJ}{JA} = \dfrac{b\lambda}{JA}\dfrac{a}{c}$ con lo que $JA = \dfrac{bc\lambda}{a}$. Luego $J = (\dfrac{bc\lambda}{a} : c\lambda : b\lambda) = (bc : ca : ab)$. ■

Ahora pasaremos con la demostración del teorema

Demostración. Dado $\triangle ABC$ sea $J_aJ_bJ_c$ el triangulo pedal de J son respecto a $\triangle ABC$. Es evidente que $JJ_b = AJ \operatorname{sen}\angle JAJ_b$ y ademas por el la ley de Senos $\dfrac{J_bJ_c}{JJ_b} = \dfrac{\operatorname{sen}\angle JJ_cJ_b}{\operatorname{sen}\angle J_bJJ_c}$. Como $\square JJ_bAJ_c$ es cíclico tenemos que $m\angle JJ_cJ_b = m\angle JAJ_b$ y $m\angle J_bJJ_c + m\angle J_bAJ_c = 180^o$ con lo que $\dfrac{J_bJ_c}{JJ_b} = \dfrac{\operatorname{sen}\angle J_bAJ_c}{\operatorname{sen}\angle JAJ_b}$, es decir $J_bJ_c = JJ_b.\dfrac{\operatorname{sen}\angle J_bAJ_c}{\operatorname{sen}\angle JAJ_b}$. Es fácil demostrar que $J = (bc, ca, ab)$ en coordenadas tripolares, de ahi que si $AJ = \lambda bc$ entonces $J_bJ_c = AJ \operatorname{sen} A = bc\lambda \operatorname{sen} A = 4R^2\lambda \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$. Analogamente tenemos que $J_cJ_a = 4R^2\lambda \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ y $J_aJ_b = 4R^2\lambda \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ con lo que $\triangle J_aJ_bJ_c$ es equilátero. ■

Teorema 0.4. *J y J' son los conjugados isogonales de F^+ y F^-.*

Demostración. Por el teorema 2 tenemos que el triangulo pedal de J es equilatero. Asi $m\angle J_cJ_aJ_b = 60^o$ pero por el teorema lema 1 $\overline{BF} \perp \overline{J_cJ_a}$ y $\overline{FC} \perp \overline{J_aJ_b}$ luego, sea J^* el conjugado isogonal de J con respecto a $\triangle ABC$ y asi $m\angle BJ^*C = 120^o$. Analogamente $m\angle CJ^*A = 120^o$ y $m\angle AJ^*B = 120^o$ por lo tanto J^* es el punto de Fermat de $\triangle ABC$. ■

Lema 0.5. *Dado $\triangle ABC$, sean F_a^+, F_b^+, F_c^+ tal que BF_a^+C, CF_b^+A, AF_c^+B son equiláteros y sea F^+ su primer punto de Fermat. Sean N_a^+, N_b^+, N_c^+ los baricentros de los triángulos BF_a^+C, CF_b^+A, AF_c^+B, entonces:*

(i) $\triangle N_a^+N_b^+N_c^+$ *es equilátero y su centro es el baricentro de* $\triangle ABC$.

(ii) $\overline{N_b^+N_c^+} \perp \overline{AF^+}$, $\overline{N_c^+N_a^+} \perp \overline{BF^+}$, $\overline{N_a^+N_b^+} \perp \overline{CF^+}$.

Teorema 0.6. *Dado $\triangle ABC$, sea F^+ su primer punto de Fermat y J el primer punto isodinámico, entonces $\overline{F^+J}$ es paralelo a la recta de Euler de $\triangle ABC$.*

Demostración. Sean X, Y, Z las reflexiones de J con respecto a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ respectivamente con lo que, por el lema 1 tenemos que F^+ es el circuncentro de $\triangle XYZ$ y ademas $\overline{YZ} \perp \overline{AF^+}$, $\overline{ZX} \perp \overline{BF^+}$, $\overline{XY} \perp \overline{CF^+}$. Por el lema 5 tenemos que $\overline{N_b^+N_c^+} \perp \overline{AF^+}$, $\overline{N_c^+N_a^+} \perp \overline{BF^+}$, $\overline{N_a^+N_b^+} \perp \overline{CF^+}$ y de ahi que $\overline{N_b^+N_c^+}//\overline{YZ}$, $\overline{N_c^+N_a^+}//\overline{ZX}$, $\overline{N_a^+N_b^+}//\overline{XY}$. De todo ello se sigue que $\triangle N_a^+N_b^+N_C^+$ y $\triangle XYZ$ son homotéticos y como $\triangle N_a^+N_b^+N_c^+$ es equilátero se sigue que $\triangle XYZ$ es equilátero. Sea φ la homotecia que transforma $\triangle XYZ$ en $\triangle N_a^+N_b^+N_C^+$, como F^+ es el centro de $\triangle XYZ$ entonces $\varphi(F^+)$ es el centro de $\triangle N_a^+N_b^+N_C^+$ y esto es,por el lema 2, el baricentro G de $\triangle ABC$. Sea $O = \varphi(J)$ con lo que, como una homotecia transforma rectas paralelas en rectas paralelas , $\overline{N_a^+O}//\overline{XJ}$. Desde que $\overline{XJ} \perp \overline{BC}$, entonces $\overline{N_a^+O} \perp \overline{BC}$ y de ahi que L esta en la mediatriz de $\overline{BC}$. Análogamente O está en la mediatriz de $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, por lo tanto O es el circuncentro de $\triangle ABC$. Como $\varphi(F^+) = G$ y $\varphi(J) = O$ se sigue, por que las homotecias transforman una recta en una paralela, que $\overline{GO}//\overline{F^+J}$. ■