SOLUCIÓN AL PROBLEMA 38

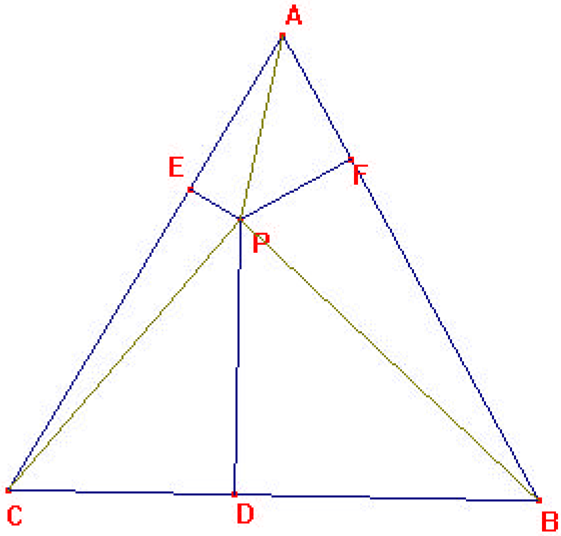
Profesora Fabiola Czwienczek Müller
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Maracay, Venezuela

PROBLEMA: Se da el triángulo equilátero ABC, de lado a, en el que tenemos un punto arbitrario P desde el cual se trazan las perpendiculares PD, PE y PF a los lados del triángulo BC, CA y AB, respectivamente. Se verifica que

$$k = \frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}$$

es constante.

SOLUCIóN: se realizó la construcción con el Cabri, que representa la situación. Se trazaron los segmentos auxiliares PA, PB y PC (Ver figura).



Nótese que al sumar las áreas de los triángulos PCB, PCA y PAB obtenemos el área del triángulo ABC, la cual es $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. El área del triángulo PCB es $\frac{PD.CB}{2}$, la de PCA es $\frac{PE.CA}{2}$ y la de PAB es $\frac{PF.AB}{2}$. Por tanto,

$$\frac{PD.CB}{2} + \frac{PE.CA}{2} + \frac{PF.AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Puesto que CB = CA = AB = a, de la igualdad anterior se tiene que:

$$\frac{a}{2}(PD+PE+PF)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Simplificando obtenemos:

$$\mathbf{PD}+\mathbf{PE}+\mathbf{PF}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{a}$$

Por otra parte, los triángulos AEP, CEP, CDP, BDP, BFP y AFP son rectángulos. Al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos las siguientes igualdades, las cuales identificamos con un número entre paréntesis:

$AP^2=AF^2+PF^2$ (1) $\quad BP^2=BF^2+PF^2$ (3) $\quad CP^2=CD^2+PD^2$ (5)

$AP^2=AE^2+PE^2$ (2) $\quad BP^2=BD^2+PD^2$ (4) $\quad CP^2=CE^2+PE^2$ (6)

De (1) y (2):

$$\begin{aligned}
AF^2+PF^2 &= AE^2+PE^2\\
&= (a-CE)^2+PE^2\\
&= a^2-2aCE+(CE^2+PE^2)\\
&= a^2-2aCE+CP^2 && \text{por la ecuación (6)}\\
&= a^2-2aCE+CD^2+PD^2 && \text{por la ecuación (5)}\\
&= a^2-2aCE+(a-BD)^2+PD^2\\
&= 2a^2-2aCE-2aBD+(BD^2+PD^2)\\
&= 2a^2-2aCE-2aBD+BP^2 && \text{por la ecuación (4)}\\
&= 2a^2-2aCE-2aBD+BF^2+PF^2 && \text{por la ecuación (3)}\\
&= 2a^2-2aCE-2aBD+(a-AF)^2+PF^2\\
&= 3a^2-2aCE-2aBD-2aAF+AF^2+PF^2
\end{aligned}$$

Al simplificar, resulta:

$$0 = 3a^2-2aCE-2aBD-2aAF$$

De donde:

$$2aCE+2aBD+2aAF=3a^2$$

Así, $\mathbf{CE+BD+AF}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{a}$

Finalmente, $k=\dfrac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3}{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Nótese que k es constante. **QED**

Fabiola Czwienczek