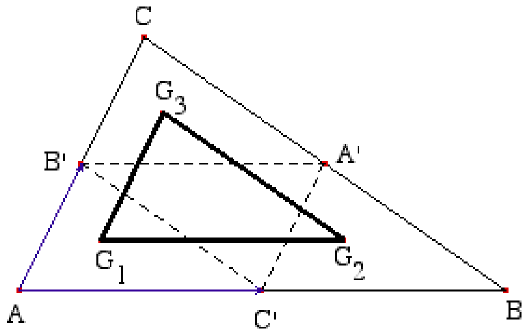
Resolución del Ejercicio nº 46
Propuesto por Romero Márquez J.B.

Enunciado

Dado un triángulo ABC, sea $A'B'C'$ su triángulo de puntos medios. Designamos por G_i (baricentros), H_i (ortocentros), y C_i circuncentros $i = 1, 2, 3$ de los triángulos $AB'C'$, $BA'C'$ y $CA'B'$ respectivamente. Uniendo los puntos G_i entre si, y lo mismo para los H_i y los C_i respectivamente se obtienen tres triángulos. Probar que los tres triángulos así obtenidos son congruentes y, a su vez, semejantes al triángulo ABC.

Resolución

La demostración vamos a realizarla para el triángulo de vértices los baricentros G_1, G_2 y G_3, pues en el resto de los casos (circuncentros y ortocentros) se razona de forma análoga.
Los triángulos $AB'C'$, $BA'C'$ y $CA'B'$ son congruentes como se puede deducir aplicando cualquiera de los criterios de congruencia de triángulos, y son semejantes a ABC con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.



Denotemos $v = \vec{AC'}$ y $w = \vec{AB'}$.
Por la traslación t_v de vector v el triángulo $AC'B'$ se transforma en el triángulo $C'BA'$.
Por la traslación t_w de vector w el triángulo $AC'B'$ se transforma en el triángulo $B'A'C$.
De ello se deduce que

$$t_v(G_1) = G_2 \qquad t_w(G_1) = G_3,$$

y en consecuencia

los triángulos $G_1G_2G_3$ y $AC'B'$ son congruentes

Por un camino similar se puede comprobar que son congruentes los triángulos $H_1H_2H_3$ y $AC'B'$, y los triángulos $C_1C_2C_3$ y $AC'B'$.
Por todo lo señalado anteriormente se deduce que los triángulos $G_1G_2G_3$, $H_1H_2H_3$ y $C_1C_2C_3$ son congruentes entre si y semejantes al triángulo ABC con razón de semejanza $\frac{1}{2}$.
Todas las propiedades empleadas en el desarrollo de la prueba son testables utilizando Cabri, utilizado también como herramienta de dibujo en esta demostración.