

El teorema de Feuerbach

Francisco Javier García Capitán

Resumen

Esta es la traducción del capítulo ‘Feuerbach, On the Theorem Which Bears His Name’ del libro *A Source Book in Mathematics*, de David Eugene Smith, que a su vez es una traducción del alemán al inglés por el profesor Roger A. Johnson, del Hunter College, Nueva York.

Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) fue profesor de matemáticas en el Gimnasio de Erlangen, Alemania. Es conocido principalmente por el teorema que lleva su nombre y que reproducimos aquí. El capítulo anterior hace referencia a este teorema y a trabajos anteriores sobre el tema por Brianchon y Poncelet. Esta es una traducción de *Eigenshaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch Sie bestimmten Linien und Figuren*, publicada por Feuerbach en 1822 (2ª ed., 1908). La traducción incluye los apartados que llevan al teorema, pero omite las partes de la obra que no se usan en la demostración. Como en el caso del artículo precedente, éste suministra una fuente de algunos de los trabajos interesantes sobre la geometría moderna del triángulo.

CAPÍTULO I

SOBRE LOS CENTROS DE LAS CIRCUNFERENCIAS, QUE SON TANGENTES A LOS TRES LADOS DE UN TRIÁNGULO

1. Se supone conocido que hay cuatro circunferencias que son tangentes a los lados del triángulo ABC , uno interno al triángulo y los otros externos. Sus centros S , S_1 , S_2 y S_3 son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo.

2. Si llamamos r, r_1, r_2, r_3 a los radios de las circunferencias con centros S, S_1, S_2 y S_3 , respectivamente, sabemos que sus valores son:

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c}, r_1 = \frac{2\Delta}{-a+b+c}, r_2 = \frac{2\Delta}{a-b+c}, r_3 = \frac{2\Delta}{a+b-c},$$

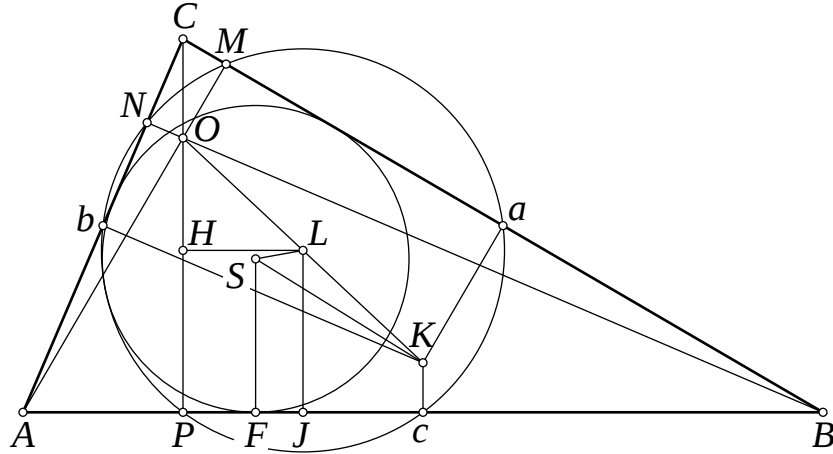
donde, como es usual, a, b y c son las medidas de los lados BC, CA y AB , y Δ es el área del triángulo ABC .

.....

CAPÍTULO II

SOBRE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE LAS PERPENDICULARES DESDE LOS VÉRTICES DE UN TRIÁNGULO A LOS LADOS OPUESTOS

19. Al trazar alturas AM, BN, CP de un triángulo ABC obtenemos el triángulo MNP , que es notable por tener el menor perímetro de todos los triángulos inscritos en el triángulo $ABC \dots$



Llamando α, β, γ a los ángulos del triángulo, tenemos $AP = b \cos \alpha$, $AN = c \cos \alpha$, y entonces

$$NP^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) \cos^2 \alpha,$$

pero como $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$ resulta $NP^2 = a^2 \cos^2 \alpha$ y $NP = a \cos \alpha$. Análogamente, $MP = b \cos \beta$ y $MN = c \cos \gamma$ o, si expresamos el coseno en términos de los lados,

$$MN = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

y similarmente para MP y NP . Añadiendo los tres valores y teniendo en cuenta que

$$a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = 16\Delta^2,$$

fórmula equivalente a $\Delta^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$, obtenemos que $MN + MP + NP = \frac{8\Delta^2}{abc}$, y como $\frac{abc}{4\Delta} = R$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita a ABC , obtenemos finalmente que

$$MN + NP + MP = \frac{2\Delta}{R}.$$

.....

Si el triángulo es obtusángulo, por ejemplo en A , la fórmula es válida, pero cambiando el signo del término NP :

$$MN - NP + MP = \frac{2\Delta}{R}.$$

Los teoremas siguientes están sujetos a una modificación análoga a ésta.

.....

23. Como $AN = c \cos \alpha$, $AP = b \cos \alpha$ y $\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \Delta$, se deduce que $\triangle ANP = \Delta \cos^2 \alpha$, $\triangle BMP = \Delta \cos^2 \beta$ y $\triangle CMN = \Delta \cos^2 \gamma$. Por ello,

$$\triangle MNP = \Delta(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma),$$

y teniendo en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} \cos^2 \gamma &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2, \\ \sin^2 \alpha \sin^2 \beta &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

y como consecuencia,

$$\begin{aligned} MNP &= 2\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2} \Delta. \end{aligned}$$

24. Si ρ es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y ρ_1, ρ_2, ρ_3 son los radios de las circunferencias exinscritas, entonces, teniendo en cuenta §2 y §23, obtendremos para el triángulo acutángulo ABC :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}, \\ \rho_1 &= \frac{4\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{-a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}, \end{aligned}$$

cambiando de signo los términos donde aparece $\cos \alpha$ cuando el triángulo sea obtusángulo en A .

Ahora, como en general, según §19, $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \frac{2\Delta}{R}$, tendremos para el triángulo acutángulo ABC :

$$\rho = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

y por otro lado, si A es obtuso,

$$\rho_1 = -2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

.....

26. El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo MNP es

$$\frac{MN \cdot MP \cdot NP}{4\Delta MNP} = \frac{abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{8\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = \frac{1}{2}R,$$

es decir, la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

.....

32. Como los ángulos AOP y ABC son iguales, entonces $AO = \frac{AP}{\sin \beta}$, y como $AP = b \cos \alpha$ y $\sin \beta = \frac{b}{2R}$ obtenemos $AO = 2R \cos \alpha$. De forma parecida, $BO = 2R \cos \beta$ y $CO = 2R \cos \gamma$. En consecuencia,

$$AO + BO + CO = 2R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

Usando las fórmulas de los cosenos y una reducción algebraica obtenemos, para un triángulo acutángulo,

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r + R}{r}, \quad AO + BO + CO = 2(r + R).$$

.....

35. Al ser $OM = BO \cos \gamma$ y, por §32, $BO = 2R \cos \beta$,

$$OM = 2R \cos \beta \cos \gamma.$$

Análogamente, $ON = 2R \cos \alpha \cos \gamma$ y $OP = 2R \cos \alpha \cos \beta$. Si multiplicamos estas expresiones respectivamente por AO , BO y CO (§32), entonces como $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{\rho}{2R}$ (§32),

$$AM \cdot OM = BO \cdot ON = CO \cdot OP = 2\rho R.$$

Es decir, *el ortocentro de un triángulo divide a cada altura en dos partes, cuyo producto es el doble del producto de los radios de las circunferencias circunscritas al triángulo ABC y al triángulo formado por los pies de las alturas.*

.....

CAPÍTULO III

SOBRE EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO

45. Si K es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y se trazan perpendiculares Ka , Kb , Kc desde este punto a los lados BC , CA y AB ,

$$Kc = AK \cos AKc = R \cos ACB = R \cos \gamma.$$

Análogamente, $Kb = R \cos \beta$ y $Ka = R \cos \alpha$. Comparando estas expresiones con las halladas en §32 para AO , BO y CO obtenemos

$$AO = 2Ka, BO = 2Kb, CO = 2Kc,$$

es decir *en cualquier triángulo, la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita hasta un lado es la mitad de la distancia del ortocentro al vértice opuesto.*

.....

CAPÍTULO IV

DETERMINACIÓN DE LAS POSICIONES RELATIVAS DE LOS PUNTOS ANTERIORMENTE TRATADOS

49. Si K y S son los centros de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo ABC y trazamos las perpendiculares Kc y SF sobre AB , entonces

$$KS^2 = (Ac - AF)^2 + (SF - Kc)^2.$$

Pero $Ac = \frac{1}{2}c$ y $AF = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, de donde

$$Ac - AF = \frac{1}{2}(a - b).$$

Además, por §2,

$$SF = \frac{2\Delta}{a + b + c},$$

y por §45,

$$Kc = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8\Delta},$$

y de donde

$$SF - Kc = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) - c(a^2 + b^2 - c^2)}{8\Delta}.$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior para KS^2 y efectuando las correspondientes reducciones obtenemos

$$KS^2 = \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{16\Delta^2},$$

que teniendo en cuenta los valores conocidos de los radios R y r podemos expresar en la forma

$$KS^2 = R^2 - 2rR.$$

En cualquier triángulo, la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita es igual al cuadrado del radio de la circunferencia circunscrita menos el doble producto de este radio por el de la circunferencia inscrita.

De forma análoga podemos obtener que $KS_1^2 = R^2 + 2r_1R$, siendo S_1 y r_1 el centro y el radio de una circunferencia exinscrita.

51, 53. Exactamente de la misma forma pueden obtenerse las relaciones

$$\begin{aligned} OS^2 &= 2r^2 - 2\rho R, \\ KO^2 &= R^2 - 4\rho R. \end{aligned}$$

54. Si L es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo MNP , cuyo radio se ha visto (§26) que es $\frac{1}{2}R$, trazamos OL , y como O es también el centro de la circunferencia inscrita en MNP , entonces (§49) $OL^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$, y como acabamos de ver que $KO^2 = R^2 - 4\rho R$, se deduce que $KO^2 = 4OL^2$, es decir $KO = 2OL$.

Si el triángulo es obtuso, una pequeña modificación en la demostración lleva al mismo resultado: *En cualquier triángulo, el ortocentro dista el doble del centro de la circunferencia circunscrita que del centro de la circunferencia que pasa por los pies de las alturas.*

55. Si se trazan las perpendiculares LJ , LH desde el centro L sobre las rectas AB y CP , es $LJ = PH$, y como H es un ángulo recto,

$$PH^2 = \frac{OP^2 + LP^2 - OL^2}{2OP}.$$

Ahora usamos que $LP = \frac{1}{2}R$, $OL^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$ (por §49) y que (por §35, 45) $OP \cdot Kc = \rho R$, de donde $LP^2 - OL^2 = OP \cdot Kc$. Si sustituimos esta expresión en $PH = LJ$, el resultado es

$$LJ = \frac{1}{2}(OP + Kc).$$

Esta propiedad nos dice que los puntos O , L y K están alineados, y el teorema reluce: *En cualquier triángulo, el centro de la circunferencia circunscrita, el punto común de las alturas, y el centro de la circunferencia que pasa por los pies de las alturas están alineados siendo el último punto el punto medio de los otros dos.*

56. Como el punto L es el punto medio de KO , el punto J también es el punto medio de Pc , de donde $Lc = LP = \frac{1}{2}R$; y análogamente en cada uno de los otros lados AC , BC . Por tanto tenemos el teorema:

En cualquier triángulo, la circunferencia que pasa por los pies de las alturas también corta a los lados en los puntos medios.

57. Trazamos LS y sabemos que en el triángulo KOS , como L es el punto medio de KO , $2SL^2 + 2OL^2 = KS^2 + OS^2$. Si sustituimos en esta ecuación los valores de los cuadrados de OL , KS y OS por los hallados en **54**, **49** y **51**, entonces resulta

$$LS^2 = \frac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2 \Rightarrow LS = \frac{1}{2}R - r.$$

Análogamente, cambiando por turno el signo a a , b y c ,

$$LS_1 = \frac{1}{2}R + r_1, \quad LS_2 = \frac{1}{2}R + r_2, \quad LS_3 = \frac{1}{2}R + r_3.$$

Como (por §**26**) el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo MNP es $\frac{1}{2}R$, por una propiedad conocida de circunferencias tangentes, deducimos el siguiente teorema:

La circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo es tangente a las cuatro circunferencias que son tangentes a los tres lados del triángulo, y concretamente, es tangente internamente a la circunferencia inscrita y externamente a las circunferencias exinscritas.