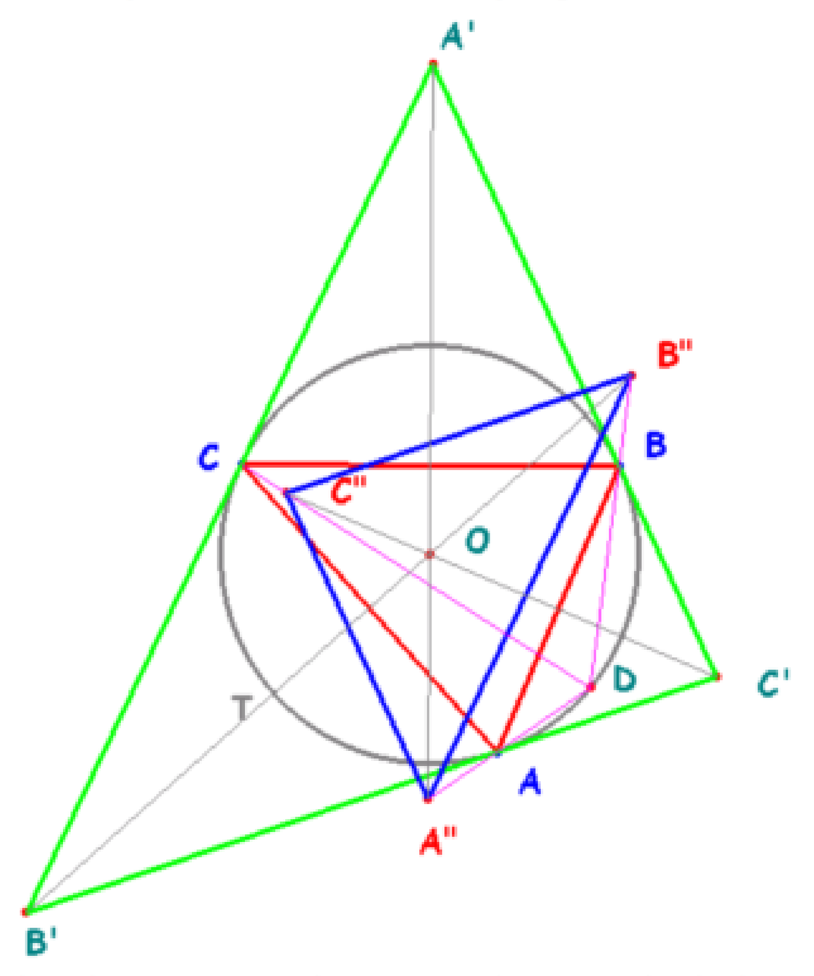
***Problema* 102**.- *Sea ABC un triángulo no equilátero. Sea T su circunferencia circunscrita y O su centro.*
Las tangentes en A, B, C a la misma forman un triángulo A' B' C'. Sea A'' B'' C'' el homotético de A'B'C' de centro O y razón – ½.
1.-*Demostrar que ABC y A'' B'' C'' son homológicos*, cuyo centro D de homología está sobre T.*
2.- *Demostrar que cada uno de los puntos A B C D pueden ser obtenidos de la misma manera que D a partir de A B C.*
*Homológicos en el sentido de Desargues: sus vértices dos a dos se encuentran sobre tres rectas que tienen un punto de concurrencia.
Rideau (2003): Le problème de Dobbs. Documento de trabajo.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1.- Si el triángulo es equilátero los triángulos *ABC* y *A"B"C"* son idénticos y el problema carece de interés.



Procederemos llevando el problema a una situación más general. Vamos a demostrar la siguiente propiedad:

Teorema.

Sea ABC un triángulo inscrito en una cónica, A'B'C' su triángulo polar, O un punto cualquiera del plano que no está en la cónica y ℓ su polar.

Si aplicamos a A'B'C' una homología arbitraria de centro O y eje su polar ℓ, el triángulo homológico A"B"C" y ABC son perspectivos.

El centro de perspectiva D, es un punto de la cónica distinto de A, B y C cuando la homología aplicada a A'B'C' tiene característica – ½ (es decir, verifica (A' A" L O) = – ½, siendo L = OA' ∩ ℓ) y recíprocamente.

Demostración

Tomaremos como sistema de referencia del plano proyectivo el formado por los vértices del triángulo y el centro *O* de la homologia de caracteristica *k*:

$\mathfrak{R} = \{A, B, C; O\}$; $A = \lambda(1, 0, 0)$; $B = \lambda(0, 1, 0)$; $C = \lambda(0, 0, 1)$, $O = \lambda(1,1,1)$.

Es fácil ver que la expresión en coordenadas homogéneas de la cónica en esta referencia es

$$cxy + ayz + bzx = 0$$

con $abc \neq 0$ y $a+b+c \neq 0$ (por la elección de *O*) como condiciones sobre los coeficientes.

La recta ℓ polar respecto de esta cónica del punto *O*, tiene por ecuación:

$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$$

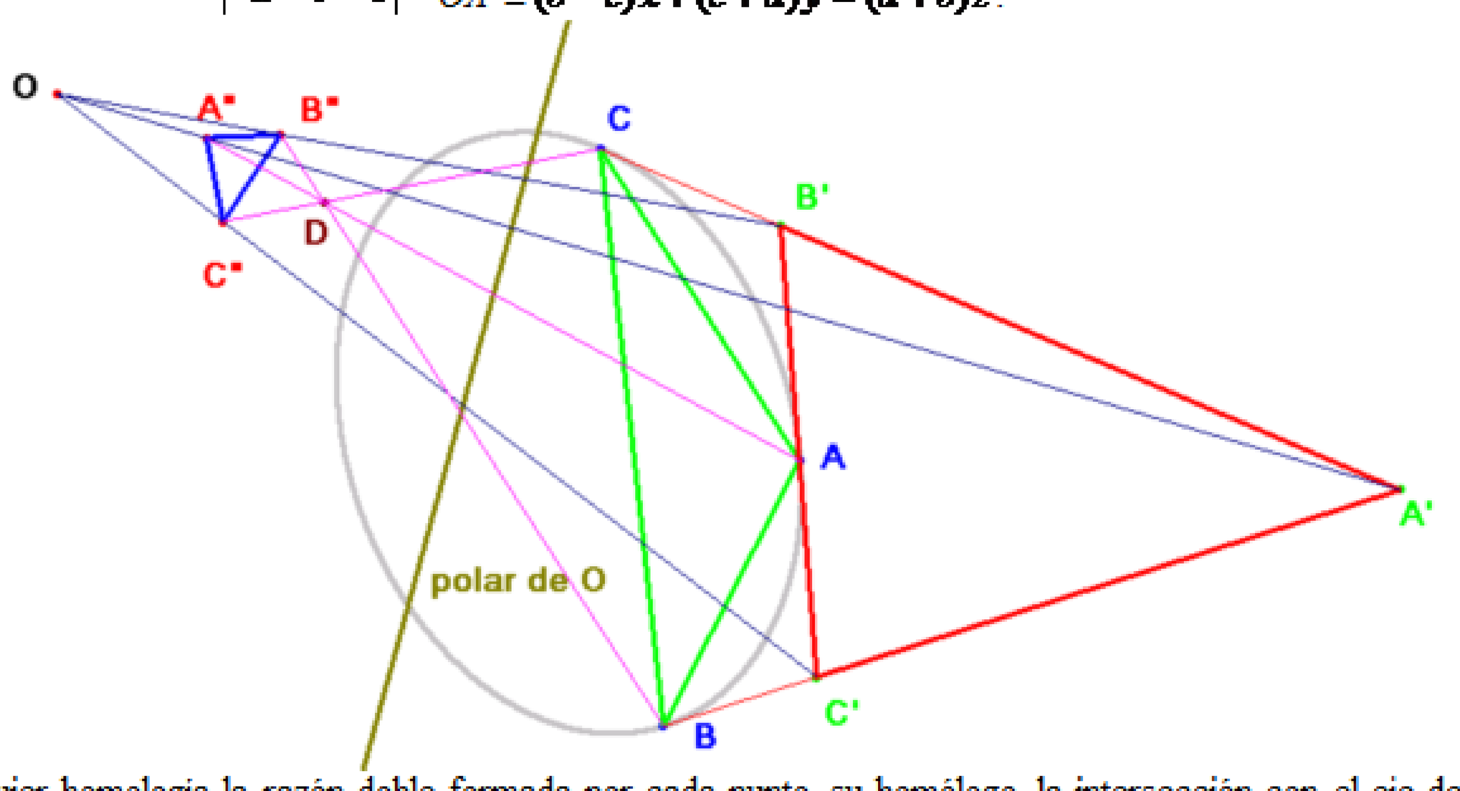
Los vértices del triángulo polar *A'B'C'* se obtienen de las intersecciones de las tangentes a la cónica en los vértices del triángulo inscrito. Las correspondientes tangentes, rectas α, β y γ son las polares de los vértices.

$$\alpha = \text{tangente en } A \equiv cy + bz = 0$$
$$\beta = \text{tangente en } B \equiv cx + az = 0$$
$$\gamma = \text{tangente en } C \equiv bx + ay = 0.$$

Resolviendo los sistemas correspondientes se obtienen:

$$A' = \lambda(-a, b, c),\ B' = \lambda(a, -b, c),\ C' = \lambda(a, b, -c).$$

La ecuación de la recta *OA'* es $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \end{vmatrix} = 0$, que una vez desarrollado el determinante es $OA' \equiv (b-c)x + (c+a)y = (a+b)z$.



En cualquier homologia la razón doble formada por cada punto, su homólogo, la intersección con el eje de la recta que los contiene y el centro, es una constante [1]. Cuando ésta es armónica esa razón doble lo es y viceversa.
Por tanto el valor de la cuaterna (*A' A" L O*) es constante. Cuando *L* está en el infinito, la homologia en cuestión es una homotecia, cuya razón es, precisamente, esa constante. Con esto enlazamos con el enunciado original del problema.
Comenzaremos calculando las coordenadas de *L*. Se trata del punto de intersección de la recta polar de *O*, con la recta *OA'*. Los cálculos oportunos dan

$$L = \lambda\left(-(c+a)(a+b), b(a+b), c(a+c)\right)$$

A", homólogo de *A'* en la homologia, deber ser tal que se verifique

$(A'A''LO) = k = (A'A''OL)^{-1} = (OLA'A'')^{-1}$
Por tanto

$$(O\,L\,A'A'') = 1/k$$

La razón doble de cuatro puntos alineados se obtiene dividiendo las coordenadas del último de ellos respecto del sistema de referencia que en esa recta definen los otros tres. Para ello se comienza tomando representantes adecuados de los dos primeros cuya suma sea el tercero.
Buscamos escalares *m, n* y *q* para los cuales sea $mO + nL = qA'$. Se encuentra fácilmente la relación

$$bc\,O + L = p\,A'$$

o bien

$$\frac{bc}{p}O + \frac{1}{p}L = A'$$

donde hemos abreviado poniendo $p = a + b + c$ ($p \neq 0$, salvo si se elige *O* sobre la cónica).

De aqui para conseguir que $(O, L, A', A'') = 1/k$ bastará con tomar

$$A'' = 1\left(\frac{bc}{p}O\right) + k\left(\frac{1}{p}L\right)$$

Y asi el punto *A"* tiene coordenadas (1, *k*) en la referencia $\mathfrak{R} = \{O, L; A'\}$

Calculando se obtiene

$$A'' = \lambda\left(-(c+a)(a+b)k + bc, b(a+b)k + bc, c(a+c)k + bc\right).$$

Si empleamos la notación $q(a) = (p-a)k + a$ y $q(b)$ y $q(c)$ los análogos, podemos escribir:

$$A'' = \lambda\left(-(c+a)(a+b)k + bc, bq(c), cq(b)\right)$$

La ecuación de la recta *AA"* es: $AA'' \equiv cq(b)y = bq(c)z$.
Como en todo el cálculo hemos usado una notación coherente, para hallar las rectas *BB"* y *CC"* bastará con cambiar la *a* por la *b* y la *x* por la *y* para *BB"* y la *a* por la *c* y la *x* por la *z* para *CC"*. Se obtienen así:

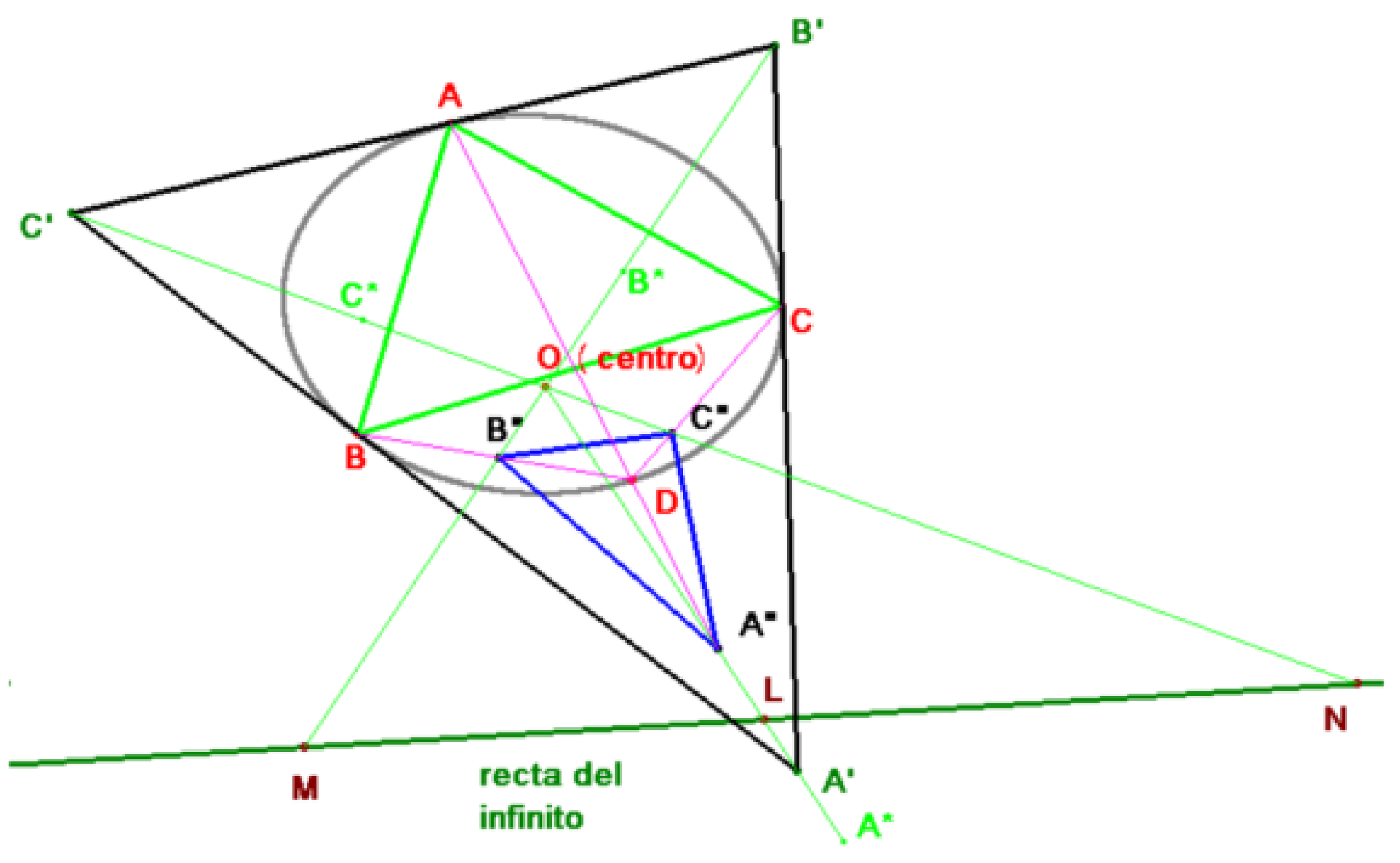
$$AA'' \equiv cq(b)y = bq(c)z$$
$$BB'' \equiv cq(a)x = aq(c)z$$
$$CC'' \equiv aq(b)y = bq(a)x$$

El último punto es demostrar la concurrencia de estas tres rectas en un punto *D* perteneciente a la cónica.
Para la concurrencia basta ver la anulación del determinante de la matriz de los coeficientes del sistema, pero como se trata de hallar el punto de concurrencia para comprobar su pertenencia a la cónica, tenemos que resolver el sistema.
El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} 0 & -cq(b) & bq(c) \\ cq(a) & 0 & -aq(c) \\ bq(a) & -aq(b) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

pues sacando factores comunes en cada columna queda el determinante de una matriz hemisimétrica de orden impar.

La solución de este sistema es el punto $D = \lambda(x_0, y_0, z_0)$ donde $x_0 = aq(b)q(c)$, $y_0 = bq(a)q(c)$ y $z_0 = cq(a)q(b)$.
Queda establecido pues que (*ABC*) → (*A"B"C"*) es una homologia de centro *D*.



Si $q(a) = 0$ se tiene *D*=*A*. Anulando $q(b)$ y $q(c)$ se obtienen *B* y *C* como centros perspectivos, todos ellos sobre la cónica. Por consiguiente podemos decir que para cada cónica existen a lo más tres homologias que transforman *ABC* en *A"B"C"* previo paso por *A'B'C'* y cuyo centro es uno de los vértices de *ABC*. Sin embargo, solamente hay una homologia tal que, para cualquiera de las cónicas circunscritas, hace que el centro perspectivo sea un punto situado sobre la cónica, en general distinto de *A*, *B* o *C*.

Hagamos que *D* esté en la cónica. Sustituyamos sus coordenadas en la ecuación $cxy + ayz + bzx = 0$.
$cx_0y_0 = abc \cdot q(a) \cdot q(b) \cdot q(c)^2$
$ay_0z_0 = abc \cdot q(a)^2 \cdot q(b) \cdot q(c)$
$bz_0x_0 = abc \cdot q(a) \cdot q(b)^2 \cdot q(c)$

Antes de sumar estas expresiones calculamos

$q(a) + q(b) + q(c) = (p - a + p - b + p - c)k + (a + b + c) = 2pk + p = (2k+1)p$. Llamamos $h = abc \cdot q(a) \cdot q(b) \cdot q(c)$ y ahora tenemos finalmente:

$$cx_0y_0 + ay_0z_0 + bz_0x_0 = h\,p(2k+1)$$

que se anulará cuando el valor de *k* sea – ½ como queriamos demostrar.

Una homotecia es una homologia cuyo eje es la recta del infinito. Por tanto ahora *O* es el centro de la cónica y el eje, su polar, la recta del infinito. Para hallar *A"*, homólogo de *A'* en la homotecia de centro *O* y razón – ½, calculamos primero *A**, el punto medio del segmento *OA'* (cuarto armónico de la terna *O, A', L*)). Luego buscamos *A"* de modo que *O* sea el punto medio de del segmento *A"A'*.

2.- Si ahora partimos del triángulo inscrito *BCD*, tomando sus vértices, junto con el centro de la cónica como sistema de referencia obtendriamos el punto *A*, del mismo modo. Y asi también para *B* y para *C*. Es evidente que cualquiera de esos puntos puede obtenerse de esta manera. ■

[1] Se suele llamar *característica de la homologia* a la razón doble de un punto, su homólogo, el centro y la intersección de la recta que los contiene con el eje. Si se define asi, en la homotecia (caso particular de homologia con eje en el infinito) la constante es la inversa de la razón. Por esa razón he cambiado la constante.