Los ruptores

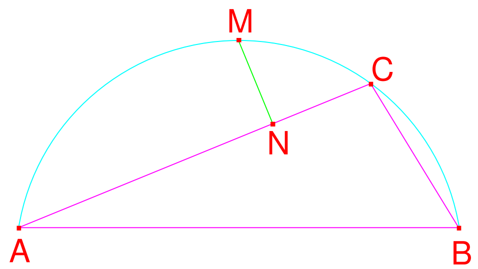
Francisco Javier García Capitán

Diciembre de 2003

1. Cuestiones sobre ruptores

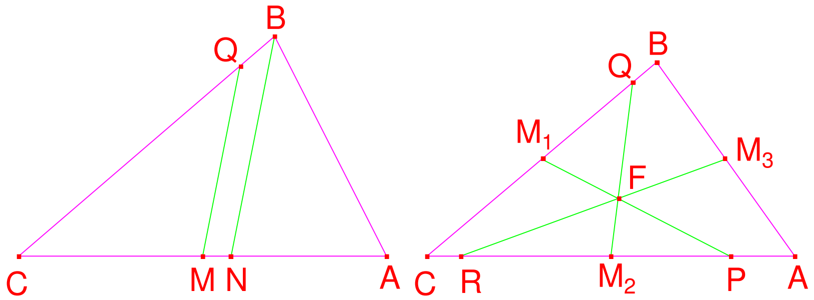
El profesor Ricardo Barroso, en el problema 111 de su laboratorio virtual *trianguloscabri*[1] plantea varias cuestiones:

1. Si por el punto medio M de un arco de circunferencia que subtiende un triángulo ACB bajamos una perpendicular MN a la cuerda que comprenda el arco donde esté M (en este caso AC), demostrar que $AN = NC + CB$.



2. Dado un triángulo ABC, sea M el punto medio de CA. El segmento MQ tal que divide en dos mitades el perímetro del triángulo ABC, se denomina *ruptor*. Construir Q, *punto ruptor*.

[1] `http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri`

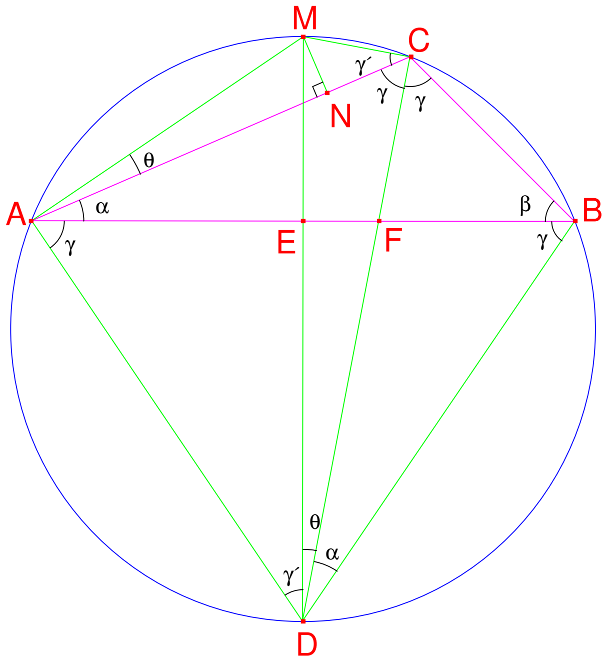


3. Demostrar que QM es paralela a BN, bisectriz del ángulo B.

4. Demostrar que los tres ruptores se encuentran en un punto, *centro ruptor* del triángulo.

2. Respuestas

1. Para responder a la primera cuestión, consideramos la figura siguiente:



Hemos trazado las bisectrices interior y exterior del ángulo C, que cortan a la circunferencia circunscrita en los puntos D y M, respectivamente. En dicha figura se cumplen las relaciones $\alpha+\beta+2\gamma=180^\circ$, $\gamma+\gamma'=90^\circ$ y $\theta=\gamma'-\alpha$. Entonces, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita a ABC,

$$AN = AM\cos\theta = 2R\operatorname{sen}\gamma'\cos\theta,$$
$$NC = MC\cos\gamma' = 2R\operatorname{sen}\theta\cos\gamma'.$$

Por tanto,

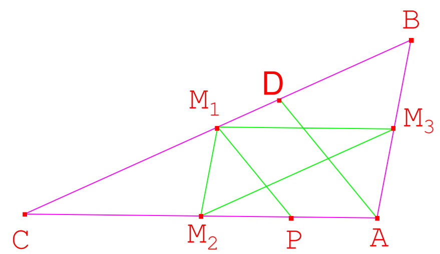
$$\begin{aligned} AN-NC =& 2R(\operatorname{sen}\gamma'\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\gamma') = \\ =& 2R\operatorname{sen}(\gamma'-\theta) = 2R\operatorname{sen}\alpha = BC. \end{aligned}$$

2. El apartado anterior da también una forma de construir el punto Q: Obtenemos los puntos M y D como intersección de la mediatriz del lado AB con la circunferencia circunscrita a ABC y proyectamos M sobre el lado AC, resultando el punto Q.

3. Ahora nos referimos a la primera figura de la página anterior y comprobamos que QM es paralela a BN. Para ello, usamos el teorema de la bisectriz:

$$\frac{CN}{CB} = \frac{\frac{AC\cdot BC}{AC+BC}}{BC} = \frac{AC}{AC+BC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}(AC+BC)} = \frac{CM}{CQ}.$$

4. Por último, para ver que los tres ruptores son concurrentes, consideramos la siguiente figura, en la que los segmentos que unen los puntos medios de ABC dividen a éste en cuatro triángulos semejantes.



Llamamos $B=\beta$, $C=\gamma$ y $A=2\alpha$. En el triángulo M_1M_2P tenemos $\angle M_1PM_2=\alpha$ y $\angle M_1M_2P=180^\circ-2\alpha$, de donde

$$M_2M_1P = 180-\alpha-(180-2\alpha)=\alpha,$$

es decir M_1P es la bisectriz del ángulo $M_3M_1M_2$. Como, análogamente, los otros ruptores también serán bisectrices de ángulos del triángulo $M_1M_2M_3$, los tres ruptores se cortarán en un punto.