TRIÁNGULOS CABRI

Problema 131. (Honsberger, R. (1995): Episodes in 19 & 20 C Euclidean Geomtry. MAA (p. 5)) Dividir el perímetro de un triángulo en dos triángulos con el mismo perímetro por una ceviana. Tal ceviana se denomina escisor. Los tres escisores de un triángulo se cortan en un punto llamado de Nagel.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $D=(0:d:1-d)\,(0<d<1)$ es un punto situado sobre el segmento BC tal que la ceviana AD divide a dicho triángulo en dos triángulos de igual perímetro, resulta que:

$$c+(1-d)a=b+da$$

por lo que:

$$d=\frac{a-b+c}{2a}\Rightarrow D=\left(0:\frac{a-b+c}{2a}:1-\frac{a-b+c}{2a}\right)=(0:a-b+c:a+b-c)$$

Además, razonando de igual forma, podríamos obtener otros dos puntos $E=(-a+b+c:0:a+b-c)$ y $F=(-a+b+c:a-b+c:0)$ situados sobre los segmentos CA y AB, respectivamente, tales que las cevianas AD, BE y CF dividen al triángulo ABC en dos triángulos de igual perímetro. Finalmente, como:

$$\begin{cases} AD\equiv 0=(a+b-c)y-(a-b+c)z \\ BE\equiv 0=(a+b-c)x-(-a+b+c)z \\ CF\equiv 0=(a-b+c)x-(-a+b+c)y \end{cases}$$

puede comprobarse (por simple sustitución) que estas tres cevianas concurren en el punto de Nagel del triángulo ABC:

$$X_8=(-a+b+c:a-b+c:a+b-c)$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega