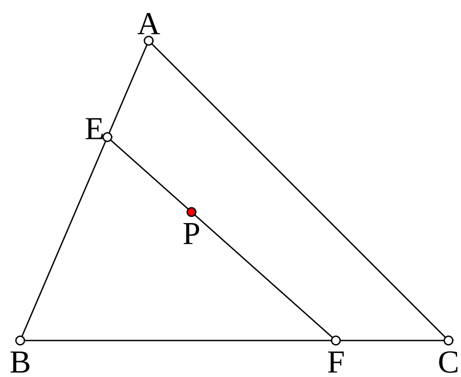
En la revista `trianguloscabri`, editada por el profesor Ricardo Barroso de la Universidad de Sevilla, aparece el siguiente problema (propuesto por José Nogareda Villar, profesor de matemáticas del IES “Ramón Olleros de Béjar”, Salamanca):

> **137**. Sea ABC un triángulo. Sea P un punto que no pertenezca al mismo. Trazar por P una recta de manera que corte al triángulo en dos figuras geométricas de la misma área.



Asignamos coordenadas a los vértices del triángulo ABC de manera que $A = (u, v)$, $B = (0, 0)$ y $C = (c, 0)$. Si $P = (x_0, y_0)$ es cualquier punto del plano, una recta que pasa por P tiene ecuación $y = y_0 + m(x - x_0)$. Llamaremos E y F a los puntos de corte de esta recta con los lados AB y BC, respectivamente.

Razonaremos que para muchos puntos P puede encontrarse un m adecuado que permita calcular los puntos E y F cumpliendo las condiciones del problema, y que para los demás P podremos encontrar puntos similares en los otros lados del triángulo.

Un poco de cálculo nos da las coordenadas de E y F:

$$E = \left(\frac{u(mx_0 - y_0)}{mu - v}, \frac{v(mx_0 - y_0)}{mu - v} \right),$$

$$F = \left(x_0 - \frac{y_0}{m}, 0 \right).$$

Usando que el área del triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, x_3), viene dada por

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

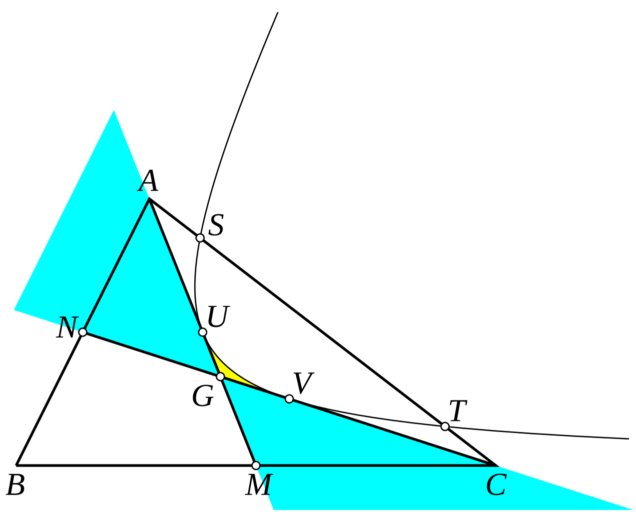
obtenemos que

$$(EBF) = \frac{v(y_0 - mx_0)^2}{2m(v - mu)}.$$

y como debe ser $(EBF) = \frac{cv}{4}$, resolviendo, obtenemos dos posibles valores de m:

$$m = \frac{-cv + 4x_0y_0 \pm \sqrt{c}\sqrt{cv^2 - 8vx_0y_0 + 8uy_0^2}}{2(2x_0^2 - cu)}$$

La figura siguiente muestra en color azul las posibles posiciones del punto P para que exactamente uno de estos valores de m corresponda a una solución del problema. En la región amarilla estarían los puntos P para los que las dos soluciones son válidas.



La curva es una hipérbola que tiene por asíntotas a las rectas de los lados AB y BC, y que es tangente a las medianas del triángulo. La ecuación de esta hipérbola es la que aparece en el radicando de la fórmula de m, es decir $cv^2 - 8vx_0y_0 + 8uy_0^2 = 0$.

Para dibujar esta hipérbola de una forma sencilla con *Cabri Géomètre II* necesitamos cinco puntos. Haciendo la intersección de la hipérbola con las medianas podemos hallar los puntos de tangencia U y V, para los que se cumplen $y = \frac{v}{2}$ e $y = \frac{v}{4}$, respectivamente.

También podemos calcular los puntos de intersección de la hipérbola con el lado AC. En este caso resulta

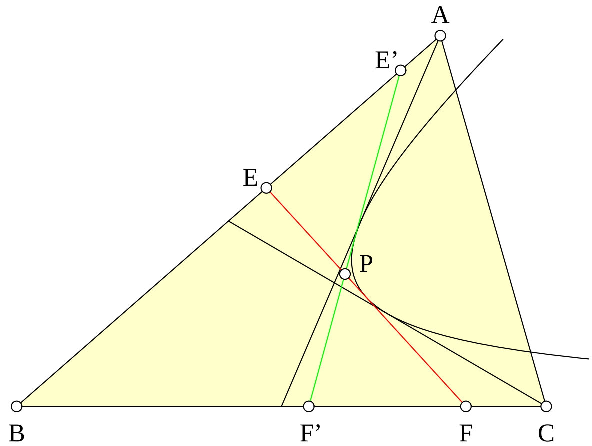
$$y = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right) v,$$

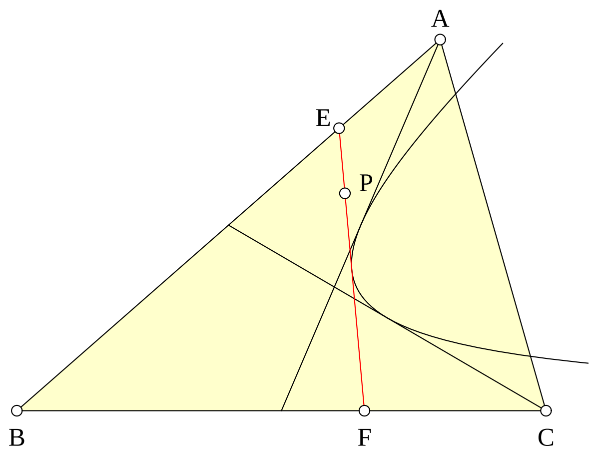
y como $\frac{1}{4}\sqrt{2}v$ es la cuarta parte de la diagonal de un cuadrado de lado v, para obtener los puntos S y T, trazamos una circunferencia con centro el punto medio de AC y radio la cuarta parte de la diagonal de un cuadrado de lado AC. Como es sabido, los puntos que, como U y V, están simétricamente situados en el segmento AC respecto de su punto medio se llaman *isotómicos*.

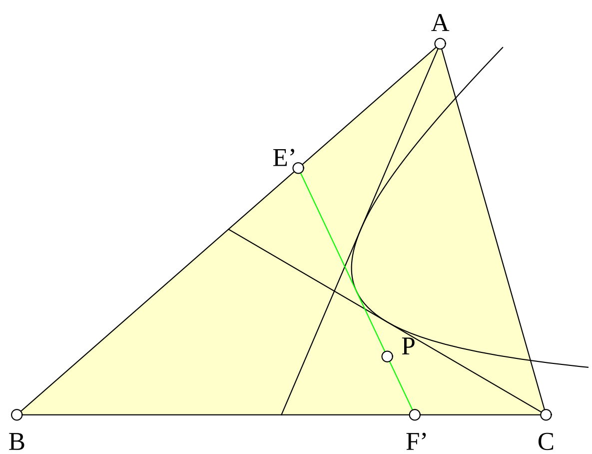
Teniendo en cuenta que la hipérbola es simétrica respecto de la bisectriz interior del ángulo B, podemos hallar un quinto punto hallando cualquier de los simétricos de los puntos U y V.

Por último, digamos que los puntos del plano que no están en ninguna de las zonas coloreadas del plano estarán en las zonas correspondientes al permutar adecuadamente los vértices A, B y C, por lo que para cualquier punto P del plano es posible resolver el problema planteado.

`Francisco Javier García Capitán, 2004.`
`pacoga@ctv.es`


A
E'
E
P
B
F'
F
C


A
E
P
B
F
C


A
E'
P
B
F'
C