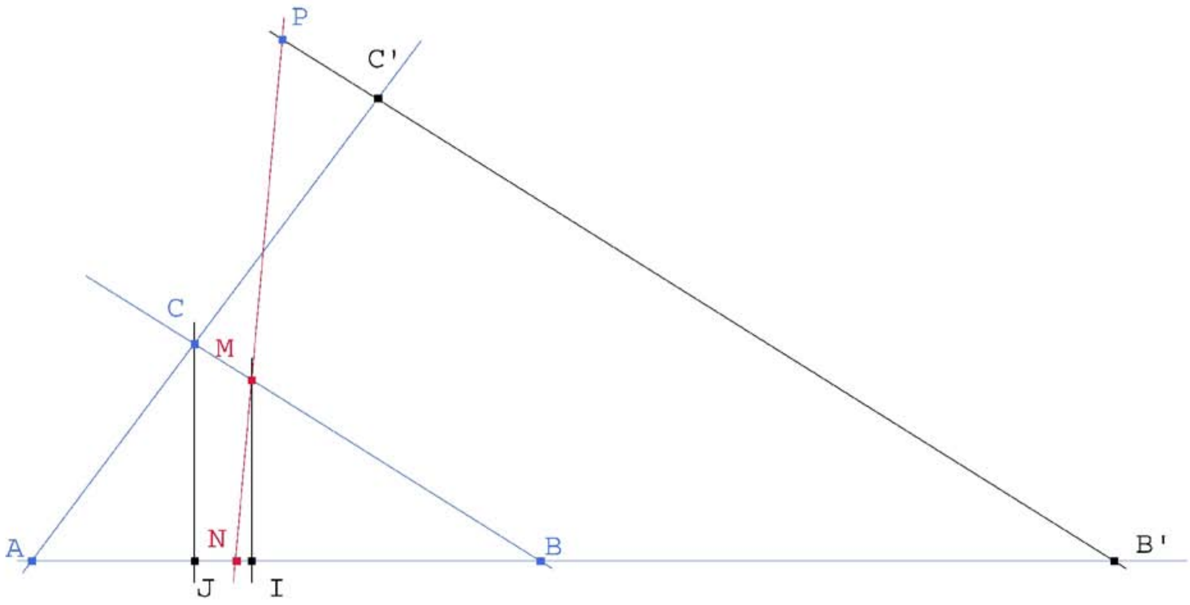
Propuesto por José Nogareda Villar, profesor de matemáticas del IES "Ramón Olleros de Béjar" (Salamanca).

PROBLEMA 137: Sea ABC un triángulo. Sea P un punto que no pertenezca al mismo. Trazar por P una recta de manera que corte al triángulo en dos figuras geométricas de la misma área. Nogereda, J. (2004): Comunicación personal

Figura 1



Si PM es la solución, el área del triángulo MNB es igual al área del polígono MNAC.

Enunciado

$$\left.\begin{array}{r} MNB + MNAC = ABC \\ MNB = MNAC \end{array}\right\} \Rightarrow 2MNB = ABC$$

Igualdad de áreas

$$2\left(\frac{BN \cdot MI}{2}\right) = \frac{BA \cdot CJ}{2} \Rightarrow \frac{MI}{CJ} = \frac{1}{2}\frac{BA}{BN}$$

Triángulos semejantes (AJB, MIB)

$$CJB \propto MIB \Rightarrow \frac{MI}{CJ} = \frac{BM}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{2BN} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow BN = \frac{BC \cdot BA}{2BM}$$

Triángulos semejantes (MNB, PNB')

$$MNB \propto PNB' \Rightarrow \frac{BN}{B'N} = \frac{BM}{B'P} \Rightarrow BM = \frac{B'P \cdot BN}{B'N} = \frac{B'P \cdot BN}{B'B + BN}$$

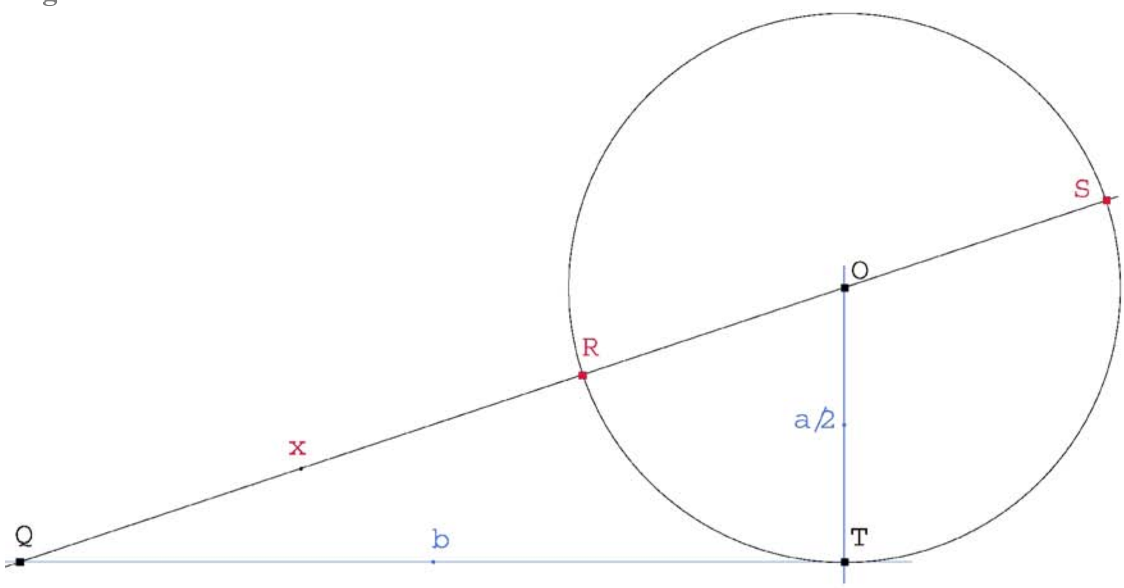
Poniendo todo junto

$$BM = \frac{B'P \cdot \dfrac{BC \cdot BA}{2BM}}{B'B + \dfrac{BC \cdot BA}{2BM}} \quad \Rightarrow \quad BM\left(\frac{BC \cdot BA}{2B'B} + BM\right) = B'P\frac{BC \cdot BA}{2B'B}$$

Acabamos de transformar el problema original en este nuevo problema:

Dados dos segmentos a y b, encontrar el segmento x tal que: $x(a+x) = b^2$

Figura 2



Para resolverlo, recordamos las propiedades de la potencia de un punto respecto a un círculo. Vemos que hay dos soluciones

$$QR \cdot QS = QT^2 \quad \Rightarrow \quad x(a+x) = b^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = QR \quad y \quad x_2 = QS$$

Resolución y construcción del nuevo problema

Sea el segmento QT de longitud b. Sobre la perpendicular por T, llevamos TO de longitud a/2. Trazamos el círculo de centro O y radio a/2 tangente a PT en T. La intersección de QO con el círculo, da dos soluciones QR y QS.

En nuestro caso

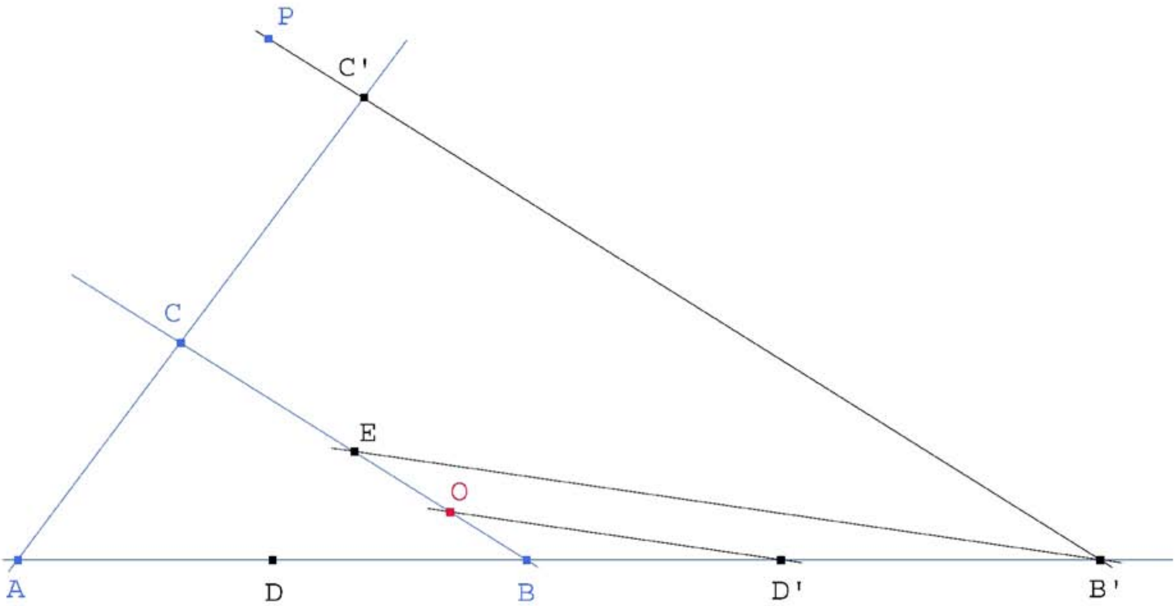
$$BM = x, \quad a = \frac{BC \cdot BA}{2B'B} \quad y \quad b^2 = B'P\frac{BC \cdot BA}{2B'B}$$

Vuelta al problema original

Obtenido x determinamos BM. La recta PM es la solución.

CONSTRUCCION

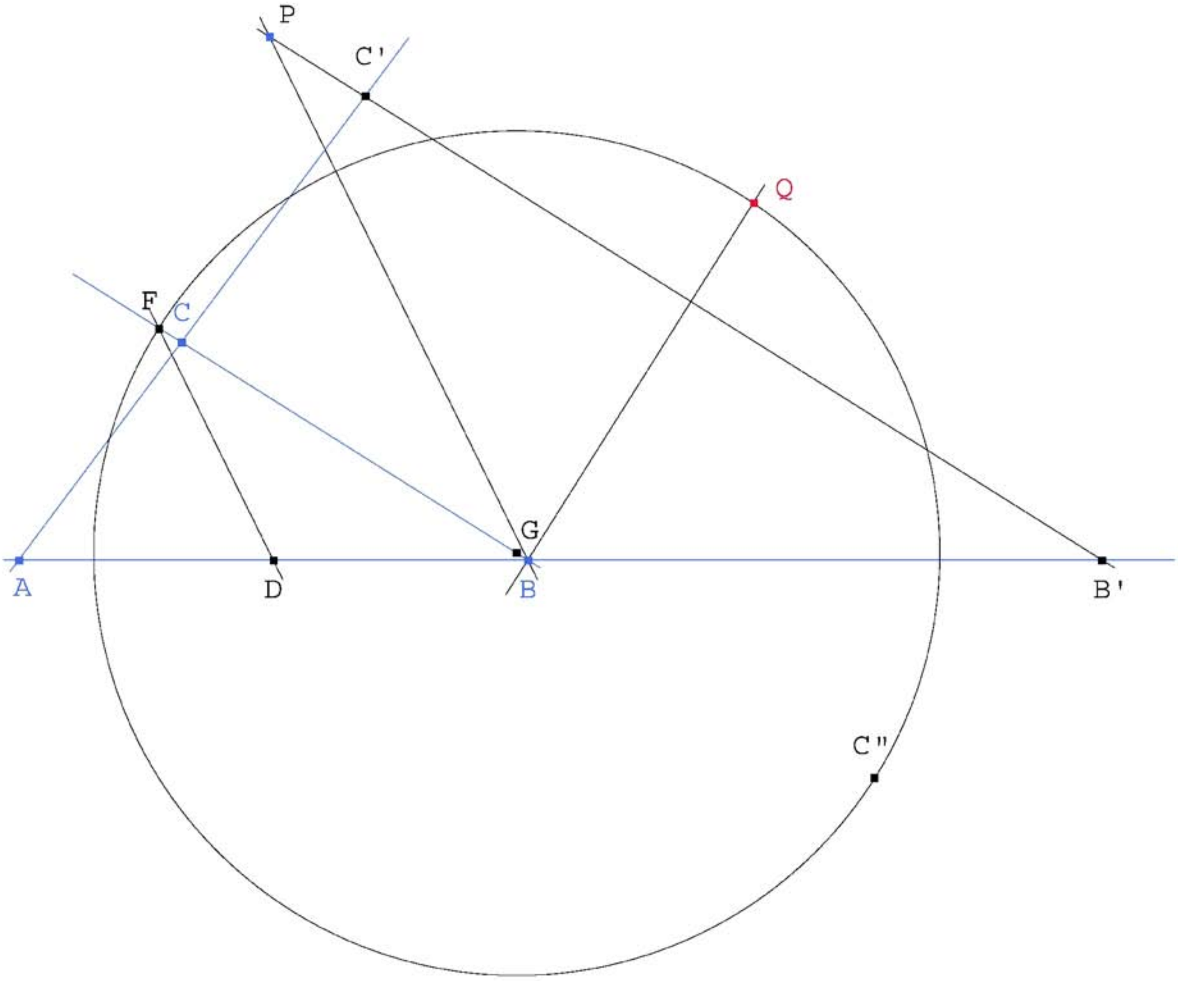
Figura 3



Trazamos, por P, una paralela a BC. Esta corta a BA en B\` y en C´ a CA.

Hallamos $\frac{a}{2}=\frac{\left(\frac{BA\cdot BC}{2BB'}\right)}{2}=\left(\frac{BA}{2}\right)\left(\frac{\left(\frac{BC}{2}\right)}{BB'}\right)$.

Para $\frac{\left(\frac{BC}{2}\right)}{BB'}$, unimos E, punto medio de BC con B´, para multiplicar por $\left(\frac{BA}{2}\right)$ llevamos por D´, simétrico del punto medio de AB respecto a B. una paralela a B´E que corta a BC en O, Entonces $\frac{a}{2}=OB$.



Hallamos $b^2 = B'P\,\dfrac{BA \cdot BC}{2BB'} = BC\left(\dfrac{BA}{2}\right)\left(\dfrac{B'P}{BB'}\right)$

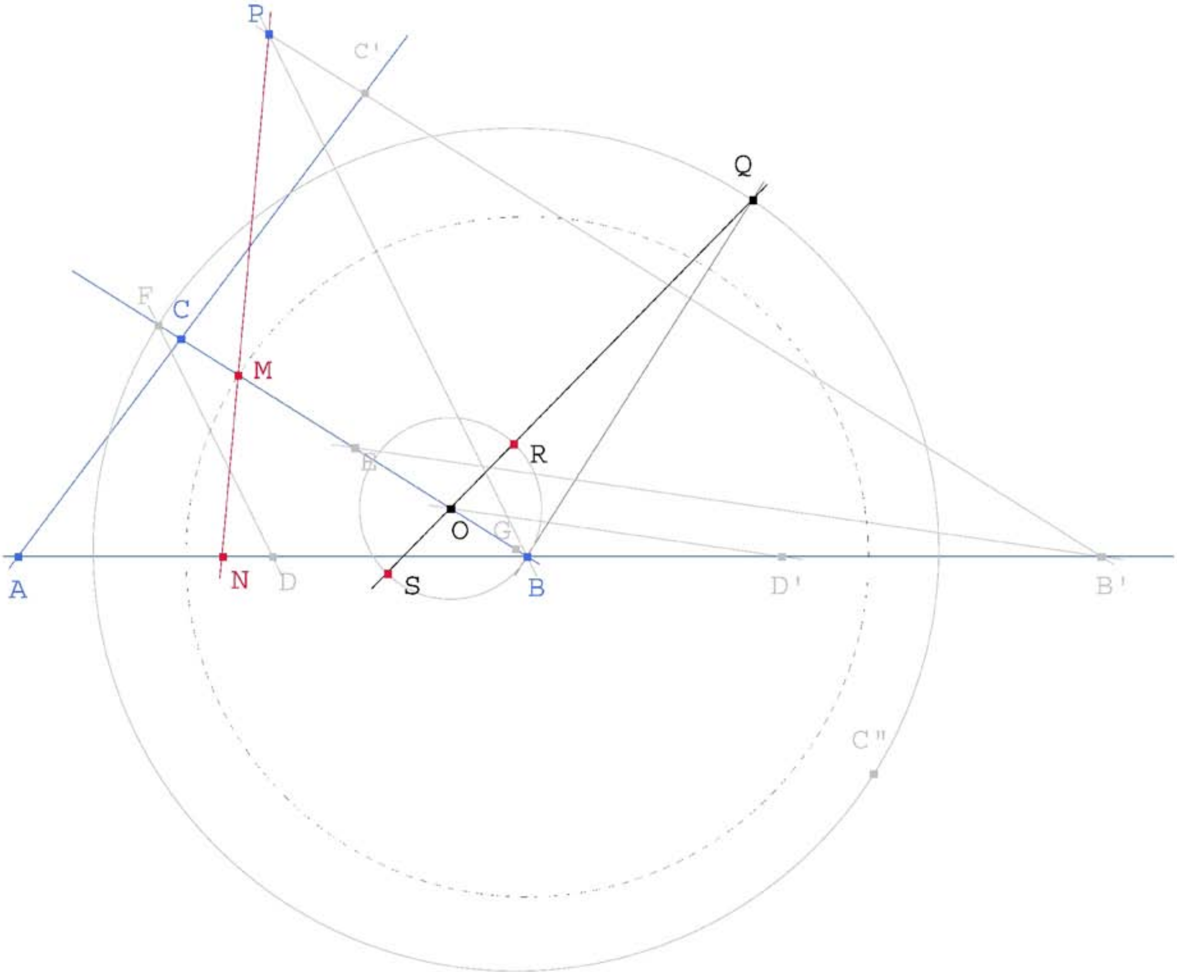
Para $\left(\dfrac{B'P}{BB'}\right)$, unimos B con P.

Para multiplicar por $\left(\dfrac{BA}{2}\right)$, por punto medio de BA, paralela a BP que corta a BC en F.

Entonces $BF = \left(\dfrac{BA}{2}\right)\left(\dfrac{B'P}{BB'}\right)$ y así $b^2 = BC\left(\dfrac{BA}{2}\right)\left(\dfrac{B'P}{BB'}\right) = BC \cdot BF$.

Para b, trazamos el círculo de diámetro $FC'' = FB + BC''$ (C´´ simétrico de C respecto a B).

La perpendicular por B a FC´´ nos da Q sobre el círculo trazado, tal que $b = BQ$.



Trazamos ahora la recta QB que corta al círculo en R y S. Tomamos la solución QR y llevamos $BM = QR$. M es el punto buscado. La recta PM es la solución buscada.