SI SOLO TENEMOS LOS CINCO PUNTOS QUE DEFINEN UNA CONICA
(Un enfoque práctico para las construcciones con regla y compás)

00 Introducción

Entre las soluciones del problema 137 del **Laboratorio Virtual de Triángulos, editado por Ricardo Barroso Campos de la Universidad de Sevilla**, dos recurren a las cónicas:

a **Lugar geométrico de rectas** (envolvente), Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)
Determinar la cónica y trazar la tangente por un punto exterior a la misma.

b **Lugar geométrico de puntos**, José María Pedret.
Determinar la cónica y la intersección de una recta con la misma.

Con Cabri II Plus y sus lugares geométricos, es fácil.

Con Cabri II, construida la cónica por cinco puntos, la intersección cónica-recta es directa; pero la tangente, por un punto exterior, no lo es.

Con Cabri, queda oculta la geometría que hay detrás de esas construcciones directas.

El interés por esa geometría, origina una pregunta:

*Si tenemos cinco puntos de la cónica; y **no su dibujo** ¿Qué se hace?...*

Y la respuesta es:

*Con sólo cinco puntos, **"regla y compás"**. (¡Nuestra regla y compás será Cabri)*

Replanteemos, en estas condiciones, los dos problemas:

(1) Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta r, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada .

(2) Dados cinco puntos A, B, C, D y E, trazar por un punto exterior O la tangente a la cónica definida por los cinco puntos.

En las figuras, se representará la cónica, aunque no se usará en ningún caso.

Un poco de **geometría proyectiva** (homografías), **sin demostraciones**, nos proporcionará las herramientas necesarias y nos enseñará que las cónicas se comportan como rectas proyectivas y que, además, tener puntos o tangentes es "lo mismo".

01 Definición de Espacio Proyectivo

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Se llama espacio proyectivo asociado a E y se nota P(E), al conjunto de **rectas vectoriales de E** (subespacios de dimensión 1).

A pesar de ello a los elementos de P(E) se les denomina puntos.

Si dim(E)=2, P(E) se llama recta proyectiva y plano proyectivo si dim(E)=3...

02 Dualidad

Sea E* el espacio vectorial dual de E. Las formas que se anulan sobre una recta de E (subespacio de dimensión 1) definen un hiperplano de E* (subespacio de dimensión dim(E*)-1) y las formas que se anulan sobre un hiperplano de E definen una recta de E*.

Si nos ceñimos al plano (dim(E)=2) podemos asociar a todo punto de P(E) una recta de P(E*) y a toda recta de P(E) un punto de P(E*).

Como E** es isomorfo a E, aplicando dos veces la **dualidad** volvemos a la figura origen.

03 Correlación

Si consideramos ahora las biyecciones de P(E*) en P(E), podemos intercambiar puntos con rectas de P(E) y además de conservar las alineaciones, conservamos las incidencias.

La correspondencia entre puntos y rectas recibe el nombre de **correlación**.

04 Razón Doble de Cuatro Puntos Alineados (Coordenadas Homogéneas)

Sea x un vector de E que engendra una recta vectorial X de P(E). Las coordenadas del vector x en una base de E reciben el nombre de **coordenadas homogéneas** de X.

Sea λ perteneciente a K, como λx es proporcional a x, define la misma recta vectorial que x, por ello, coordenadas homogéneas proporcionales definen el mismo punto de P(E).

Sean X_1, X_2, X_3, y X_4 cuatro puntos distintos de una recta proyectiva P(E) y (α_i, β_i) las coordenadas homogéneas de X_i en una base de E, la **razón doble** de cuatro puntos alineados X_1, X_2, X_3, y X_4 es el escalar (X_1, X_2, X_3, X_4):

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_4 \end{vmatrix}}$$

Vemos que el valor cambia si se altera el orden de los puntos X_i.

05 Definición de Homografía

Sea $\hat{h}$: E→E' un isomorfismo de espacios vectoriales, como $\hat{h}$ transforma rectas vectoriales en rectas vectoriales, induce una **biyección** h: P(E)→P(E') que recibe el nombre de **homografía** de P(E) en P(E'). Si X es un punto, escribiremos h(X) o X'.

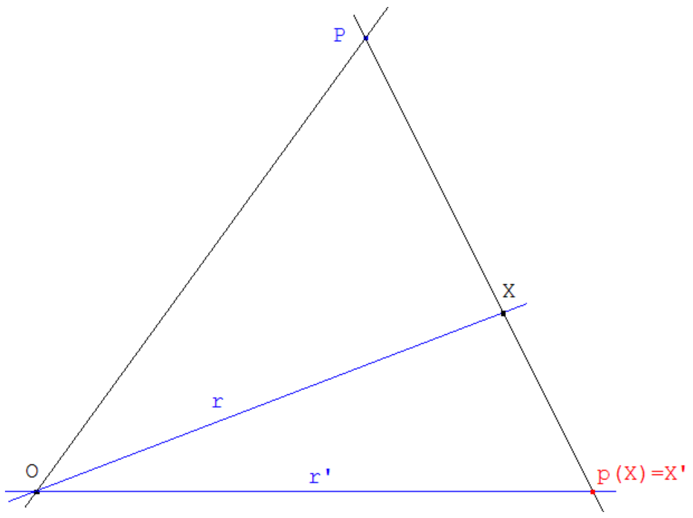
Una homografía conserva puntos alineados (rectas en rectas) y **conserva la razón doble**.

06 Teorema: Tres Pares de Puntos Definen una Única Homografía

Sean A, B, C **tres puntos distintos** de una recta proyectiva r y A', B', C' de una recta r'.
Existe una **homografía única** h: r→r' tal que h(A) = A', h(B) = B', h(C) = C'.

07 Proyección

Sean r y r' dos rectas distintas del plano proyectivo y sea P un punto no contenido en ellas; para todo punto X de r, la biyección p: r→r' definida como p(X) = PX ∩ r' se llama **proyección** de centro P de r sobre r'.



Una proyección es una homografía entre dos rectas distintas del plano proyectivo.

Una homografía es una proyección si y sólo si el punto O de intersección de las rectas se transforma en sí mismo.

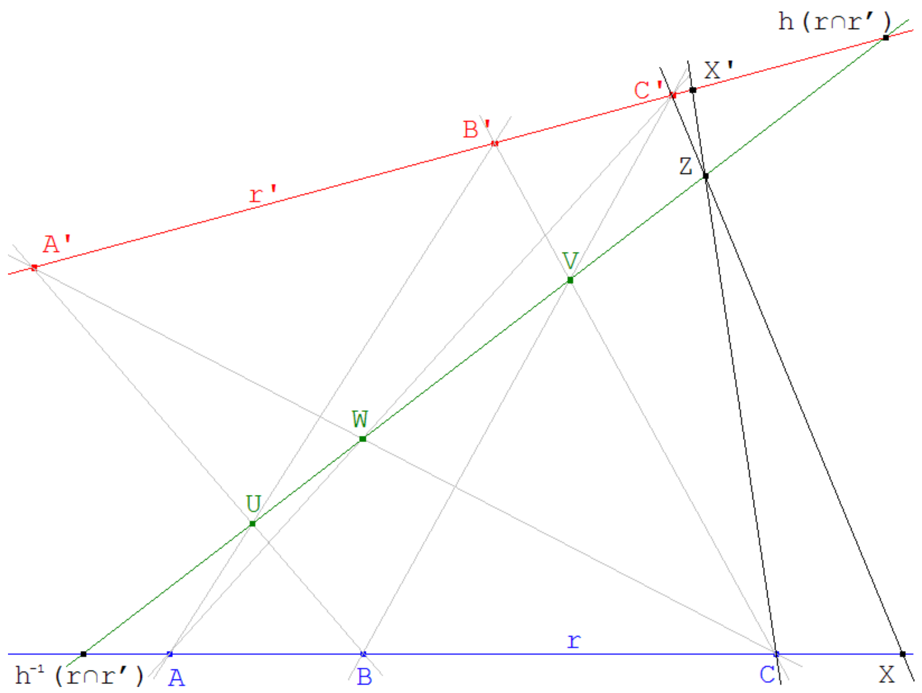
08	Eje de Homografía: Construcción Geométrica de la Imagen de un Punto

Sea h: r→r’ una homografía entre rectas proyectivas.

Si h es una proyección, dados dos puntos A y B de r, AB’ y BA’ se cortan en una recta fija que pasa por r ∩ r’.

Si h no es una proyección, AB’ y BA’ se cortan sobre la recta que une h(r ∩ r’) y h^{-1}(r ∩ r’).

Esta recta se llama **eje de homografía**.



Para construir el eje de homografía UV, determinamos U = AB’ ∩ BA’ y V = BC’ ∩ CB’. (podemos comprobar que W = CA’ ∩ AC’ está sobre el eje.)

Para construir la imagen de un punto X de r, hallamos Z = XC’ ∩ UV y así, X’ = CZ ∩ r’.

09 Haz de Rectas Concurrentes

En un plano proyectivo, el conjunto de rectas que pasa por un punto dado A, se llama haz de rectas y se nota A*.

Por dualidad [02], identificamos las rectas de un haz con los puntos de una recta proyectiva.

Todo lo dicho para puntos de la recta se puede trasladar a los haces de rectas.

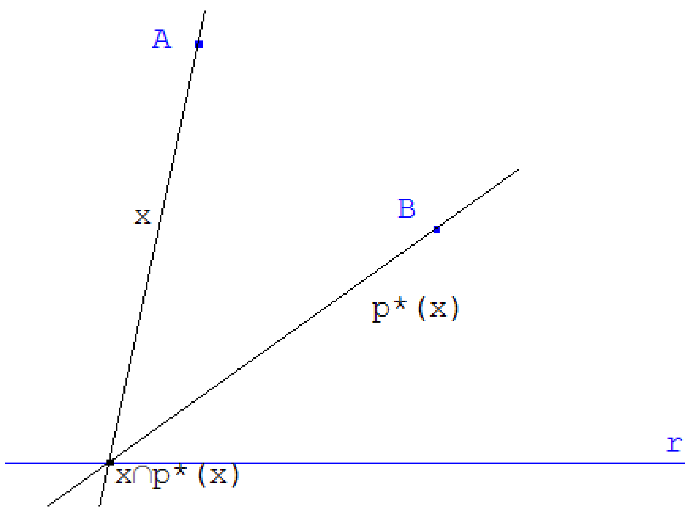
10 Razón Doble de Cuatro Rectas Concurrentes

Sean a, b, c, d cuatro rectas concurrentes del plano P(E) y A, B, C, D sus puntos correlativos en P(E*). Definimos razón doble de cuatro rectas (a, b, c, d) como [04] la razón doble (A, B, C, D).

Sean a, b, c, d cuatro rectas concurrentes en O. Una recta r, que no pasa por O, corta respectivamente en los puntos A, B, C, D a las rectas a, b, c, d; entonces la razón doble de las cuatro rectas y los cuatro puntos es la misma.

11 Proyección de Haces de Rectas Concurrentes

Sean A y B dos puntos y r una recta que no los contiene. Una biyección p*: A*→B* es una **proyección** de eje r si para toda recta x de A*, x ∩ p*(x) pertenece a r.

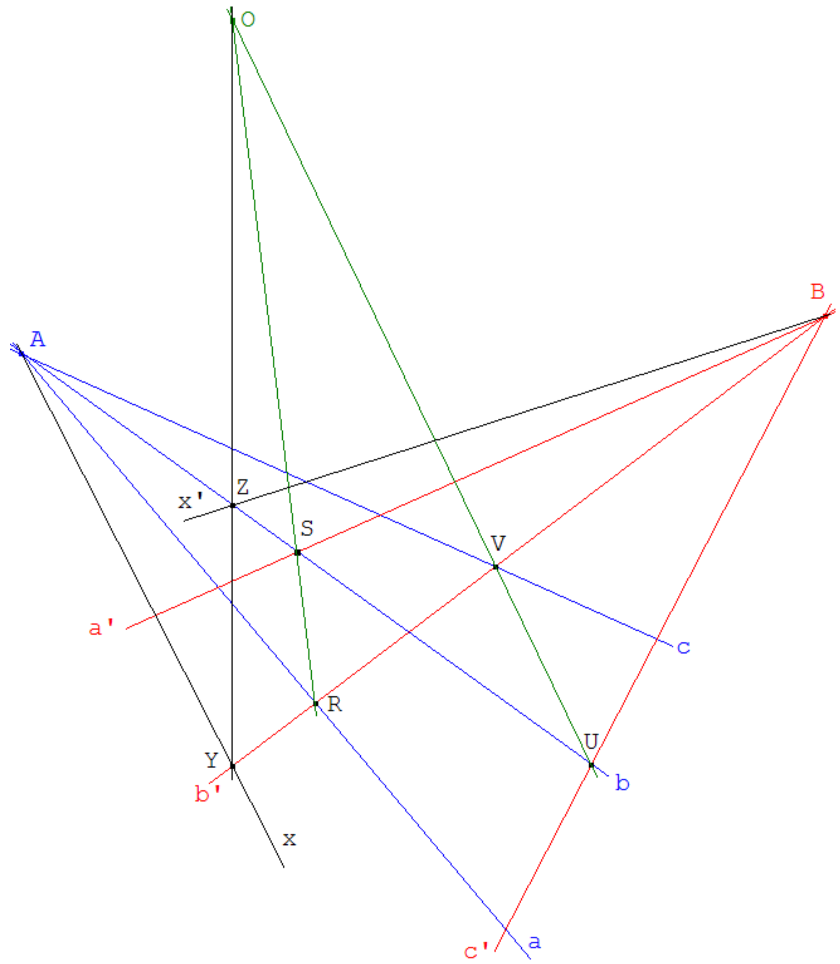


La proyección de haces es una homografía. La homografía es una proyección si h(AB) = BA.

12	**Centro de Homografía**

Sea h*: A*→B* una homografía. Si h* es una proyección, para todo par de rectas r y s de A*, la recta que une r ∩ h*(s) con s ∩ h*(r) pasa por un punto fijo de la recta AB; si h* no es una proyección las rectas que unen r ∩ h*(s) con s ∩ h*(r) pasan por el punto h^{*-1}(AB) ∩ h*(AB).

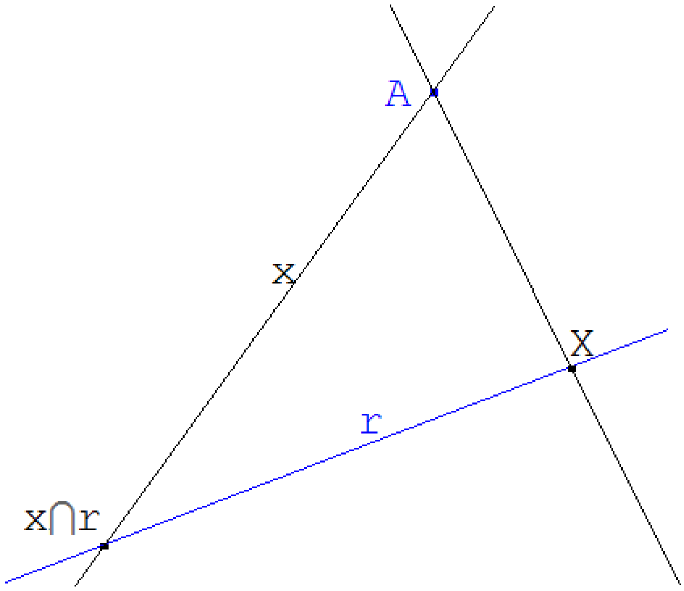
Este punto es el **centro de homografía**.



Para construir el centro de homografía, determinamos RS con R = a ∩ b’ y S = b ∩ a’, determinamos UV con U = b ∩ c’ y V = c ∩ b’. Como las dos rectas RS y UV pasan por el mismo punto fijo, este punto estará en su intersección O = RS ∩ UV.

13 Homografías entre Rectas Proyectivas y Haces de Rectas

En un plano proyectivo, existe una **biyección canónica** p entre una recta proyectiva dada r y un haz dado A*; a todo punto X de r se le asocia la recta AX de A* y a toda recta x de A* se le asocia el punto $x \cap r$. Esta biyección conserva la razón doble [10]. p recibe el nombre de **proyección** de r sobre A* y su inversa la de A* sobre r.



$h^*(AX) = AX' = p(X') = p_\circ h(X) = p_\circ h_\circ p^{-1}(AX)$.

Como $h \to p_\circ h_\circ p^{-1}$ es isomorfismo de grupos, podemos trabajar indistintamente con una homografía de puntos de una recta o con una homografía de rectas de un haz.

14 Homografía de una Recta sobre sí Misma

Cuando el isomorfismo $\hat{h}$: E→E de espacios vectoriales [05] que induce la homografía es un **automorfismo** del espacio vectorial asociado E, la homografía h: P(E)→P(E) es de la recta proyectiva sobre sí misma o del plano proyectivo sobre sí mismo o ...

15 Puntos Fijos en una Homografía de una Recta sobre sí Misma

Sea X un punto de P(E) fijo en la homografía, $h(X) = X \Rightarrow \hat{h}(X) = \lambda X$.

Un punto fijo es un **subespacio propio de dimensión 1** del automorfismo $\hat{h}$

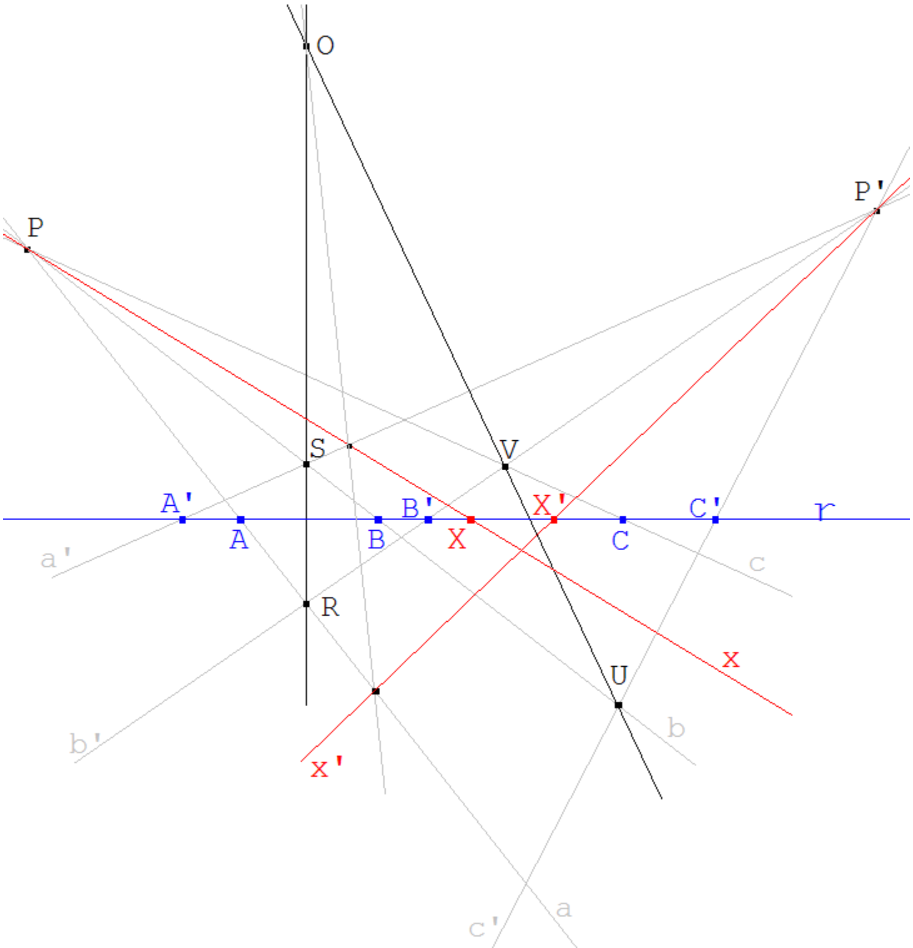
Si una homografía de una recta proyectiva sobre sí misma tiene tres puntos fijos [06], es la identidad. Si no es la identidad, tiene, al menos, dos puntos fijos.

El número de puntos fijos depende del cuerpo sobre el que se construye el espacio vectorial E.

16.01 Imagen de un Punto en una Homografía de la Recta sobre sí Misma. (método 1)

Sea la recta proyectiva r y h una homografía de r sobre r con A’ = h(A), B’ = h(B) y C’ = h(C).

Dado un punto X sobre r construir X’ = h(X).

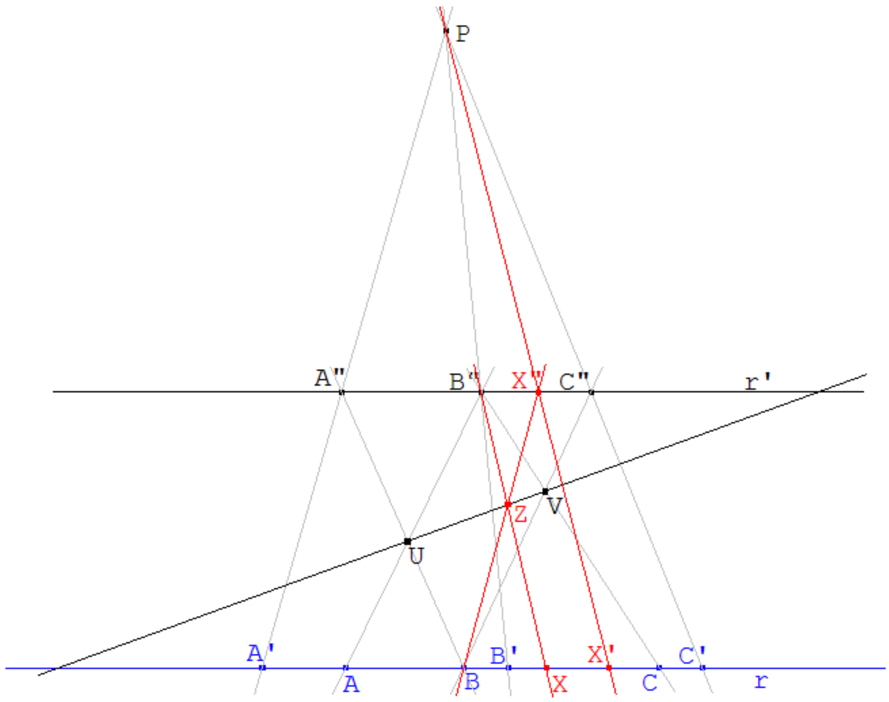


Método 1

Si tomamos dos puntos, fuera de la recta r, P y P’ y formamos dos haces P* y P’* **(proyección canónica [13])**. Hemos establecido una homografía de P* en P’*. Buscamos el centro O de homografía [12]. Dado X trazamos x = PX y hallamos x’ y X’ = x’ ∩ r.

16.02 Imagen de un Punto en una Homografía de la Recta sobre sí Misma. (método 2)

Sea la recta proyectiva r y h una homografía de r sobre r con A'=h(A), B'=h(B) y C'=h(C). **Dado un punto X sobre r construir X'=h(X)**.

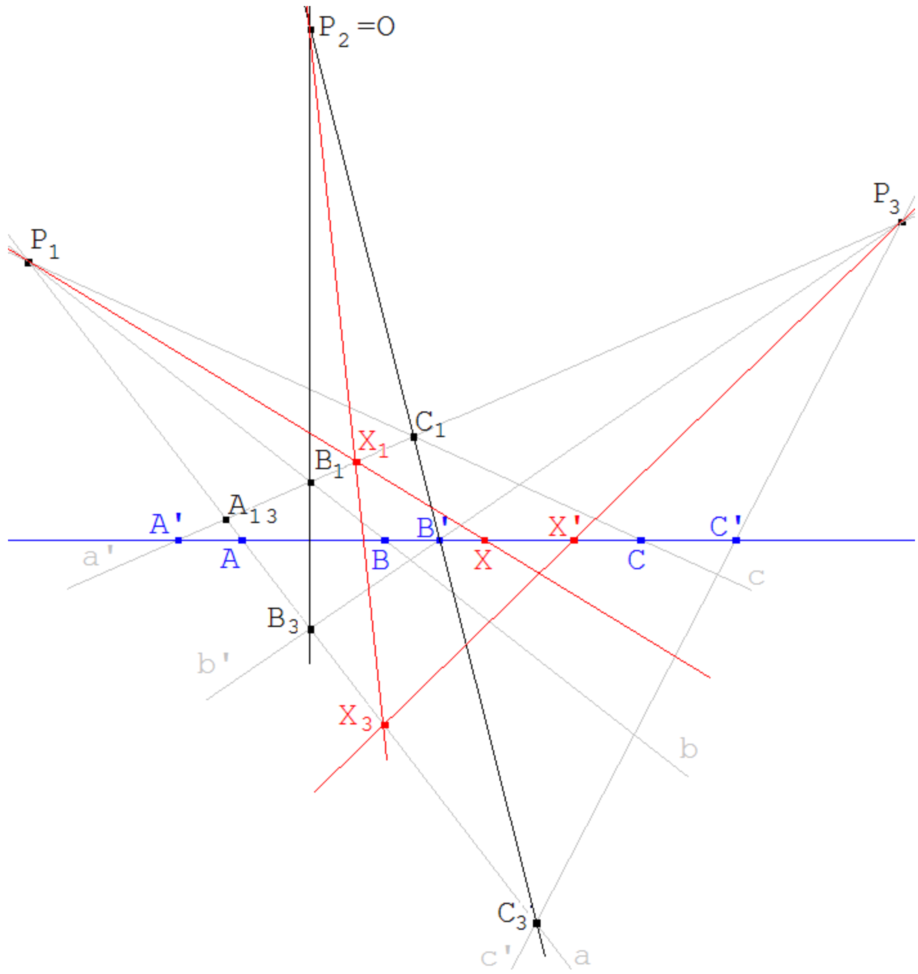


Método 2

Tomamos un punto P fuera de la recta r y formamos un haz P* con PA', PB', PC' **(proyección canónica [13])**. Cortamos este haz por una recta cualquiera r' que no pasa por P [10], hemos establecido una homografía de r en r', hallamos su eje de homografía, hallamos X'' y de aquí X'.

16.03 Imagen de un Punto en una Homografía de la Recta sobre sí Misma. (método 3)

Sea la recta proyectiva r y h una homografía de r sobre r con A' = h(A), B' = h(B) y C' = h(C).
Dado un punto X sobre r construir X' = h(X).



Método 3 (Otra visión del método 1 [16.01])
Como en [16.01] formamos dos haces de vértices P_1 y P_3.
Con centro en P_1 proyectamos p_1: r→a' y obtenemos $p_1(A) = A_1$, $p_1(B) = B_1$, $p_1(C) = C_1$.
Con centro en P_3 proyectamos p_3: r→a y obtenemos $p_3(A) = A_3$, $p_3(B) = B_3$, $p_3(C) = C_3$.

Si consideramos p_2: a'→a tal que $p_2(A_1) = A_3$, $p_2(B_1) = B_3$, $p_2(C_1) = C_3$.
Es claro que: $h = p_3^{-1} \circ p_2 \circ p_1$.

Sea P_2 el centro de la proyección p_2 entonces $P_2 = B_1B_3 \cap C_1C_3$. Es fácil ver que P_1 es el centro de homografía ($O = P_2$) del método 1. A partir de aquí, todo discurre igual.

17 Descripción de una cónica. Teorema de Chasles Steiner

Hasta aquí hemos revisado, entre definiciones, teoremas y resultados dieciséis puntos clave de la **geometría proyectiva**.

La comprensión y capacidad de utilización de estos dieciséis puntos son una herramienta, de valor inestimable, que nos da nuevos puntos de vista para enfocar los problemas de geometría.

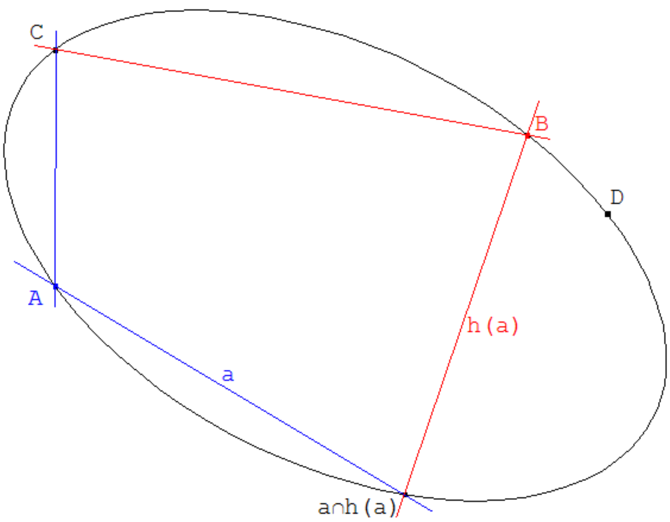
Dentro de los problemas de geometría, están las construcciones geométricas con regla y compás. **Todo lo visto, hasta ahora, se puede construir con regla y compás.**

Ahora, veremos que **una cónica tiene comportamiento de recta proyectiva [19 y 25]** y por lo tanto, los dieciséis puntos vistos son aplicables, íntegramente, a estudiar las **cónicas** sin abandonar la regla y compás. Aprenderemos a añadir el uso de un **círculo auxiliar [26 y 27]** que nos facilitará la resolución de los **problemas de segundo grado** como los que nos enfrentamos. (Si tenemos el círculo, no necesitamos el compás y podemos seguir sólo con la regla)

Esto se aplicará, en primer lugar, a la **construcción de los puntos fijos** de una homografía de la recta proyectiva sobre sí misma.

Teorema de Chasles Steiner. Un primer enunciado:
Una homografía entre haces de rectas define una cónica y recíprocamente.

Avanzando un poco más, decimos que si C es de la cónica, entonces la biyección AC→BC es una homografía.



Teorema de Chasles Steiner. Un segundo enunciado
Dados A y B dos puntos distintos del plano proyectivo y la homografía entre haces de rectas concurrentes h: A*→B*; si a es una recta del haz A* entonces el lugar de a ∩ h(a) es una cónica.

Visto la anterior, ¿que podemos hacer si tenemos cinco puntos A, B, C, D, E?
Si tenemos **cinco puntos** entre los cuales **no hay tres alineados** podemos definir **una cónica y sólo una** que pase por esos cinco puntos [18.01].

A partir de aquí, supondremos que se cumple lo necesario para que sean aplicables todos los resultados que citemos.

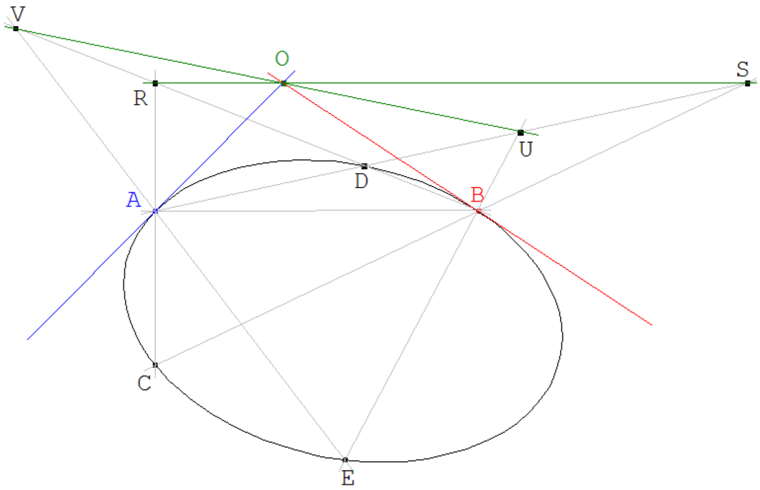
18.01 Cónica por Cinco Puntos. Determinación de una Homografía que la Define.

Dados cinco puntos distintos A, B, C, D, E tomamos (por ejemplo) A y B como vértices de dos haces de rectas concurrentes A* y B* definimos la biyección h: A*→B*:

h(AC) = BC, h(AD) = BD, h(AE) = BE

h es una homografía y esa homografía es única [06] y además define una cónica [17].

Para determinar más puntos de la cónica buscamos O, el centro de homografía de h [12]. Y estudiamos h(AB) la imagen de AB (AB recta de A*) y h^{-1}(BA) anti-imagen de BA (BA recta de B*).



18.02 Tangentes a la cónica definida por una homografía.

h(AC) = BC, h(AD) = BD, h(AE) = BE

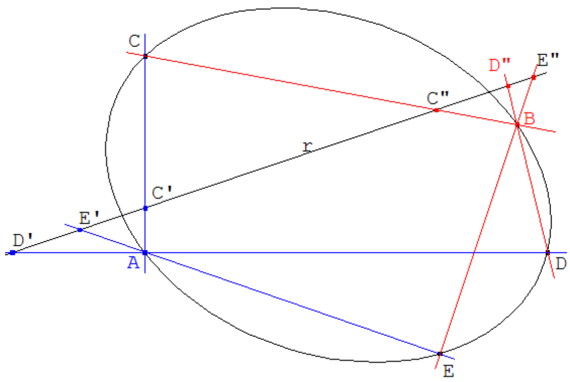
Siguiendo la definición de h, h(AB) sería BB y h^{-1}(BA) sería AA. ¿Eso que significa?
Para responderlo, usaremos el centro de homografía.

Determinación de h(AB)
AB corta a las rectas de B* en B, el otro punto buscado está sobre BO, entonces h(AB) = BO.
Pero BO sólo tiene un punto en común con la cónica y ese punto es B.
h(AB) = BO es la tangente a la cónica en el punto B.

Determinación de h^{-1}(BA)
BA corta a las rectas de A* en A, el otro punto buscado está sobre AO, entonces h^{-1}(BA) = AO.
Pero AO sólo tiene un punto en común con la cónica y ese punto es A.
h^{-1}(BA) = AO es la tangente a la cónica en el punto A.

19 Teorema de Chasles Steiner. Un tercer enunciado.

Dados r, recta proyectiva y h: r→r, biyección . Para todo par de puntos A y B fuera de r, el punto AX ∩ Bh(X) es de una cónica que pasa por A y B si y sólo si h es una homografía. X es de r.



Aquí: AC’ ∩ Bh(C’) = AC’ ∩ BC” = C, AD’ ∩ Bh(D’) = AD’ ∩ BD” = D. AE’ ∩ Bh(E’) = AE’ ∩ BE” = E.

20 Razón Doble de Cuatro Puntos de una Cónica. Puntos Conjugados Armónicos.

Se llama **razón doble de cuatro puntos** A, B, C, D de la cónica la razón doble de las cuatro rectas (XA, XB, XC, XD) siendo X un punto cualquiera de la cónica.

Si la razón doble de cuatro puntos A, B, C, D de la cónica es -1, se dice que los puntos A y B son **conjugados armónicos** de C y D. (y C, D de A, B)

21 Polar de un Punto y Polo de una Recta Respecto a una Cónica.

El conjunto de puntos conjugados de un punto P respecto a una cónica es una recta proyectiva p de P(E) llamada **polar** de P con respecto a la cónica. A toda recta p de P(E) se le puede asociar un punto P de P(E) que admite a p por polar. El punto P recibe el nombre de **polo** de p.

22 Otra Visión de la Tangente a una Cónica.

Si P es de la cónica, la polar de P respecto a la cónica pasa por P y sólo tiene un punto en común con la cónica. Es la **tangente** por P a la cónica.

23 Teorema de Chasles Steiner. Un cuarto enunciado.

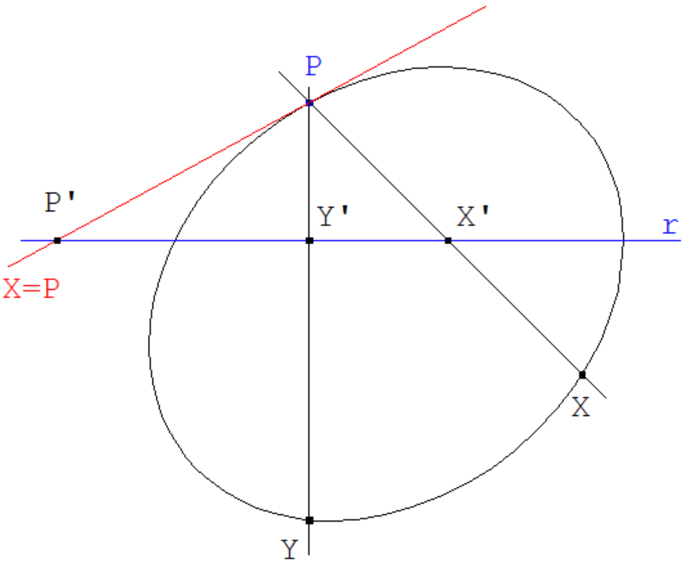
Sea una cónica y A, B dos puntos de ella. Sea O el polo de la recta AB respecto a la cónica. La biyección h: A*→B* tal que h(AO) = BA, h(AB) = BO y h(AX) = BX es una homografía.

24 Homografía de una Cónica sobre sí Misma.

Llamamos homografía de una cónica sobre sí misma a una biyección sobre sí misma que **conserve la razón doble** de cuatro puntos cualesquiera de ella.

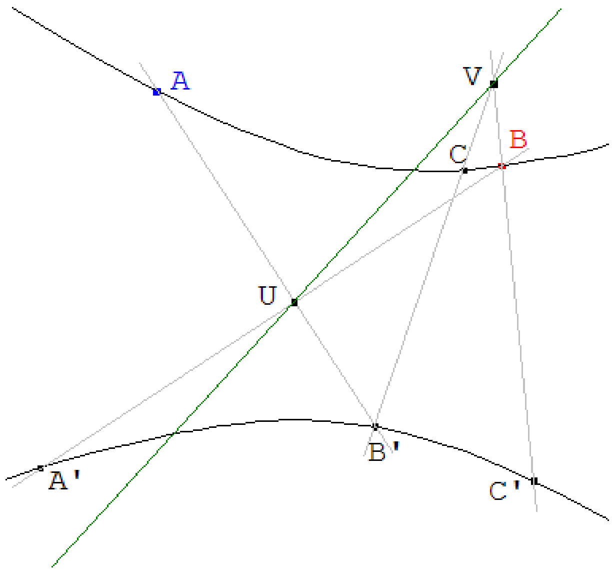
25 Proyección de una cónica sobre una recta.

Sea P un punto de una cónica y se r una recta que no pasa por P. Sea X un punto de la cónica; la recta PX corta a r en un punto X’. Es una biyección p, de la cónica sobre la recta, llamada **proyección de la cónica sobre la recta r desde de un punto P**. Conserva la razón doble y su inversa es la **proyección de la recta sobre la cónica desde un punto P**. Si X coincide con P, PX es la tangente a la cónica en P.



Sea h una homografía de la recta sobre sí misma y h’ una homografía de la cónica sobre sí misma: $h'(X) = Y = p^{-1}(Y') = p_\circ h(X') = p_\circ h_\circ p^{-1}(X)$. **Como $h \to p_\circ h_\circ p^{-1}$ es isomorfismo de grupos, podemos trabajar con h’ o h (aplicando a la cónica lo visto en las homografías de la recta).**

26 Eje de la Homografía de una Cónica sobre sí Misma.



Sea h una homografía de una cónica sobre sí misma. A, B dos puntos distintos de la cónica y A’ y B’ sus imágenes. AB’ ∩ BA’ está en una recta fija que recibe el nombre de **eje de homografía**.

Los **puntos fijos** de la homografía son los de intersección del eje de homografía con la cónica.

27 Determinación de los Puntos fijos de la Homografía de una Recta.

Sea h con h(A) = A', h(B) = B' y h(C) = C' la homografía de la recta r cuyos puntos fijos buscamos.

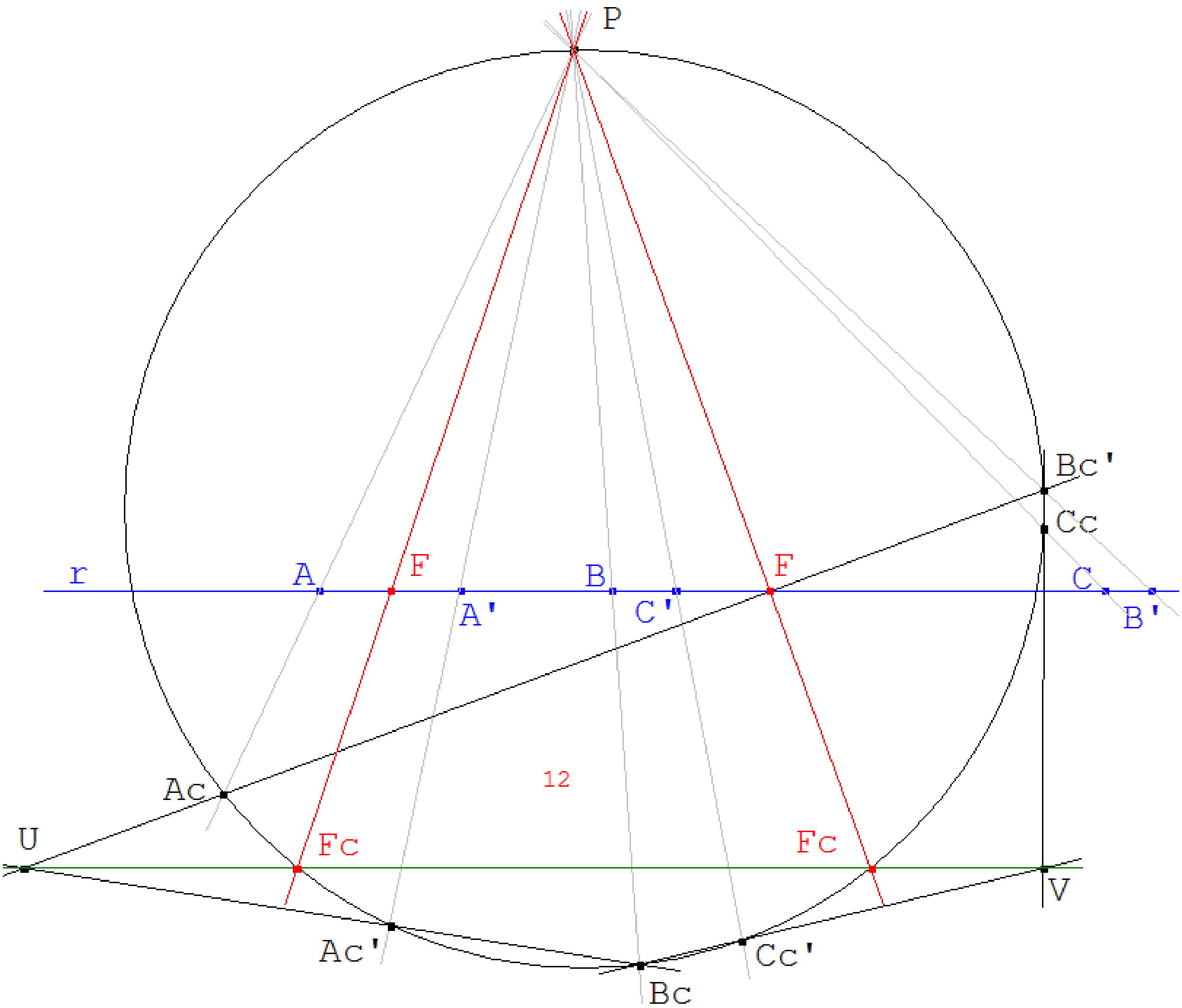
Tracemos una cónica (lo más fácil es un círculo) y un punto P de la cónica que no sea de r.

La **proyección canónica** p [25] de r sobre la cónica (lo más fácil es un círculo) induce una homografía h' sobre dicha cónica (lo más fácil es un círculo).

$h' = p \circ h \circ p^{-1}$ y. p(A) = Ac, p(B) = Bc, p(C) = Cc, p(A') = Ac', p(B') = Bc', p(C') = Cc'.

Construimos el eje de homografía de h' con h'(Ac) = Ac', h'(Bc) = Bc' y h'(Cc) = Cc'.

Las intersecciones Fc_1, Fc_2 del eje de homografía de h', con el círculo nos da los puntos fijos de h' que por proyección p^{-1} sobre r nos da los puntos fijos de h F_1, F_2,



28 Cónica Tangencial

Un conjunto $\Re$ de rectas se dice que es envolvente de una cónica, si $\Re$ es el conjunto de tangentes de la cónica.

Un conjunto de rectas $\Re$ de P(E) envuelve a una cónica de P(E) si y sólo si su imagen $\Re^*$ es una cónica de P(E*).

29 Dual del Teorema de Steiner

Sean a y b dos tangentes a una cónica. La polar p del punto $a \cap b$ corta a las tangentes a, b en los punto A, B. Una tangente cualquiera distinta de a y de b, corta a a y b en X y X'. La biyección de a sobre b definida por $A \to a \cap b$, $a \cap b \to B$, $X \to X'$ es una homografía de eje p.

Recíprocamente, sea h de a sobre b una homografía de rectas proyectivas. El eje p de esta homografía corta a y b en A y B. Entonces para todo punto X de a, la recta Xh(X) envuelve a una cónica tangente en A y B a a y b.

30 Resumen

Tenemos ahora todo lo necesario para construir la intersección de una recta y una cónica y para trazar las tangentes desde un punto exterior a la cónica. Todo ello sin tener el dibujo de la cónica; pero sí tenemos cinco puntos que la definen.

Como paso previo resolveremos, en primer lugar el siguiente problema

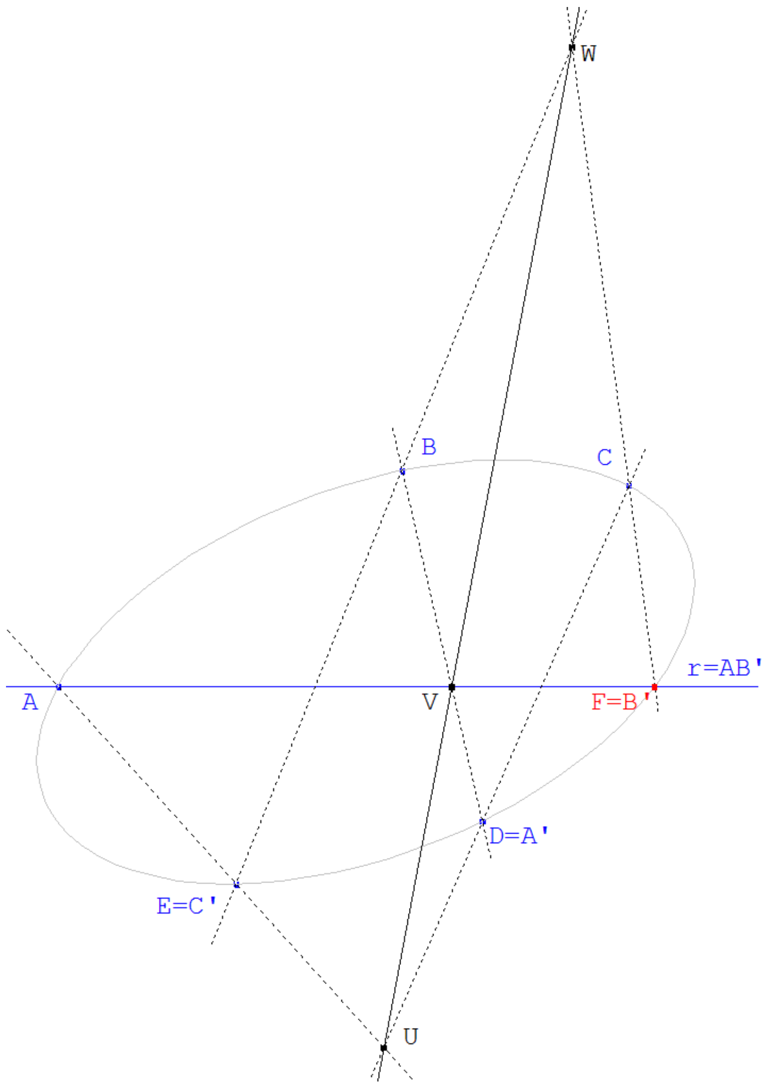
(0) Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta r, POR A, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada .

y después

(1) Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta r, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada .

(2) Dados cinco puntos A, B, C, D y E, trazar por un punto exterior O la tangente a la cónica definida por los cinco puntos.

(0)	Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta r, POR A, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada .



a Establecemos la homografía de la cónica h(A) = A' = D, h(B) = B' = F, h(C) = C' = E.

b Buscamos el eje de homografía UV.

C Con el eje de homografía, podemos hallar B'=F la imagen del punto B.

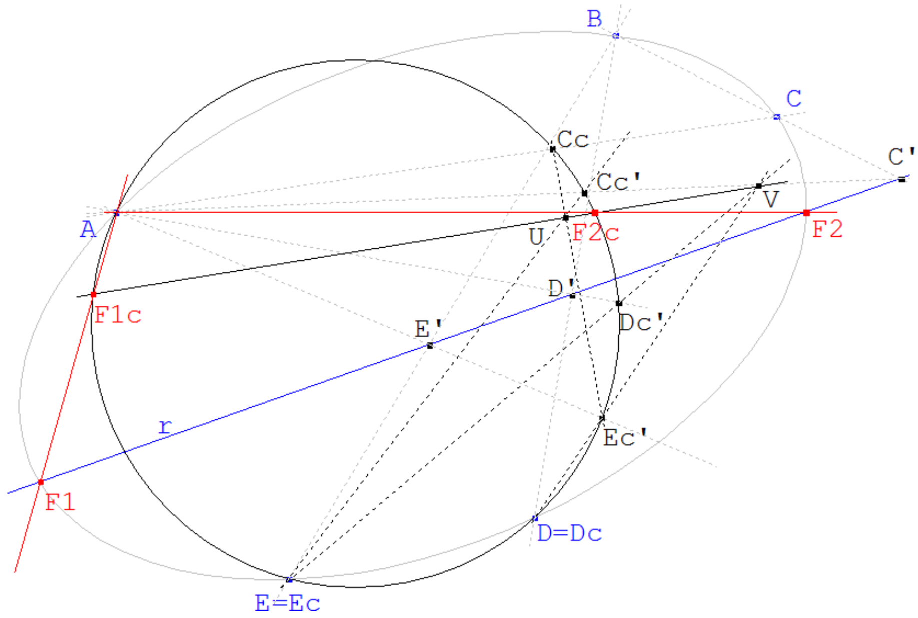
Por el enunciado r = AF = AB':

U = AC' ∩ CA' = AE ∩ CD,
V = BA' ∩ AB' = BD ∩ r,
W= BC' ∩ UV

F = B' = CW ∩ r

(Cambiando la nomenclatura, no hemos hecho más que usar el **teorema de Pascal**)

(1)	**Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta r, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada .**



a Tomando C, D y E formamos el haz A* con AC, AD, AE y el haz B* con BC, BD, BE.

b La homografía h*(AC) = BC, h*(AD) = BD, h*(AE) = BE define una cónica.
La recta r corta a A* y B*, los puntos de intersección inducen una homografía h.
Los puntos fijos de esa homografía son los puntos de intersección buscados.

c Trazamos una cónica auxiliar (Para economizar, círculo por A, E, D)

d A* corta al círculo en C_c, $D=D_c$, $E=E_c$, y B* corta a r en C', D', E'

e Desde A, proyectamos r sobre el círculo y AC', AD', AE' cortan al círculo en C_c', D_c', E_c',

f trazamos el eje UV de la homografía del círculo $h'(C_c) = C_c'$, $h'(D_c) = D_c'$, $h'(E_c) = E_c'$

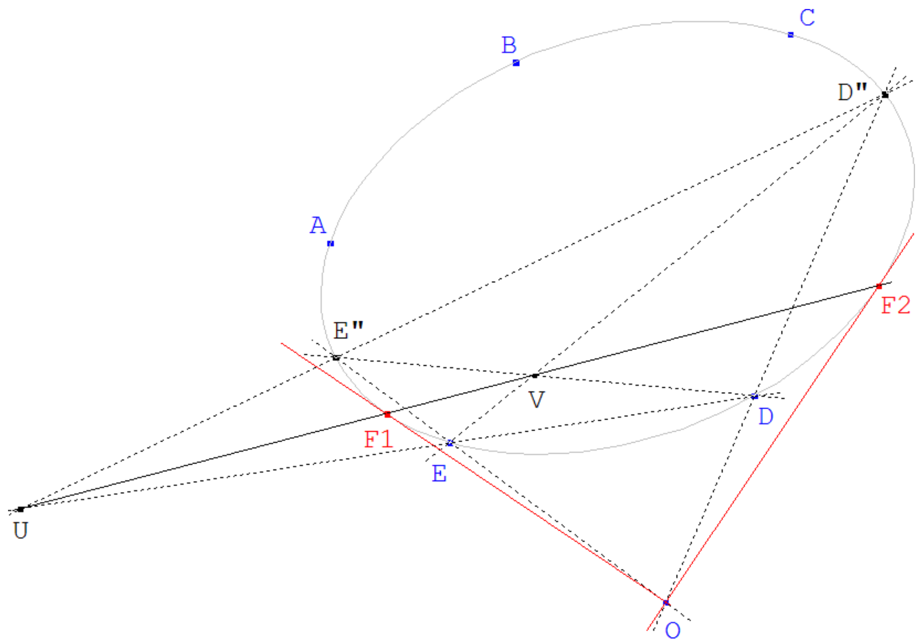
$U = C_c E_c' \cap E_c C_c'$, $V = D_c E_c' \cap E_c D_c'$

g Los puntos fijos F_{1c}, F_{2c} de h' son las intersecciones del eje UV y el círculo.

h La proyección de F_{1c}, F_{2c} sobre r nos da la solución:

$F_1 = AF_{1c} \cap r$, $F_2 = AF_{2c} \cap r$

(2)	**Dados cinco puntos A, B, C, D y E, trazar por un punto exterior O la tangente a la cónica definida por los cinco puntos.**



a	Por el dual del teorema de Chasles Steiner, sabemos que la polar del punto dado O corta la cónica en los puntos F_1 y F_2 y OF_1 y OF_2 son tangentes a la cónica en F_1 y F_2.
b	buscamos la polar UV de O respecto a la cónica: Trazamos por O la recta OE que vuelve a cortar a la cónica en E". Trazamos por O la recta OD que vuelve a cortar a la cónica en D". Para hallar E" y D" aplicamos la resolución del problema inicial (0). "*Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta r, <u>por uno de estos puntos</u>, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada*".
c	U = D"E" ∩ DE , V = DE" ∩ ED"
d	Hallamos las intersecciones F_1 y F_2 de la polar UV con la cónica aplicando la resolución del problema (1). "*Dados cinco puntos A, B, C, D y E y una recta UV, hallar la intersección F de la cónica definida por los cinco puntos y la recta dada*".
e	Para obtener las tangentes deseadas basta trazar OF_1 y OF_2.