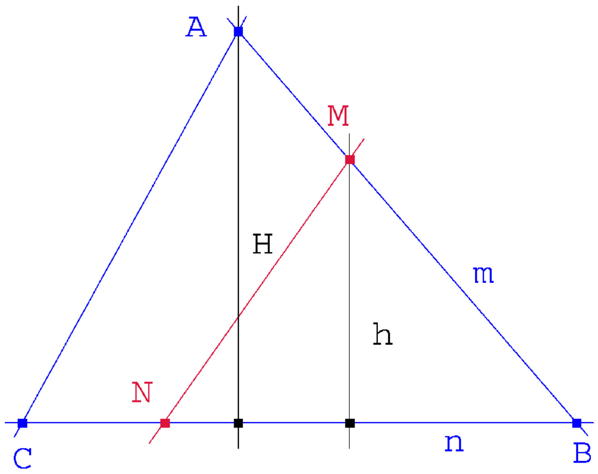
Propuesto por Francisco Javier García Capitán, (Bella Geometría) profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

Problema 138: Dado un triángulo ABC trazar una secante que corte a AB en M y a BC en N, de manera que el cuadrilátero AMNC y el triángulo BMN tengan el mismo perímetro y la misma área. Preparación de Olimpíadas.

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b, \quad BM = m, \quad BN = n$$



Igualdad de áreas:

$$n = \frac{a}{2}\frac{H}{h}; \quad pero \quad \frac{H}{h} = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{a}{2}\frac{c}{m}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}aH\right) = \frac{1}{2}nh$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad n = \frac{a}{2}c}$$

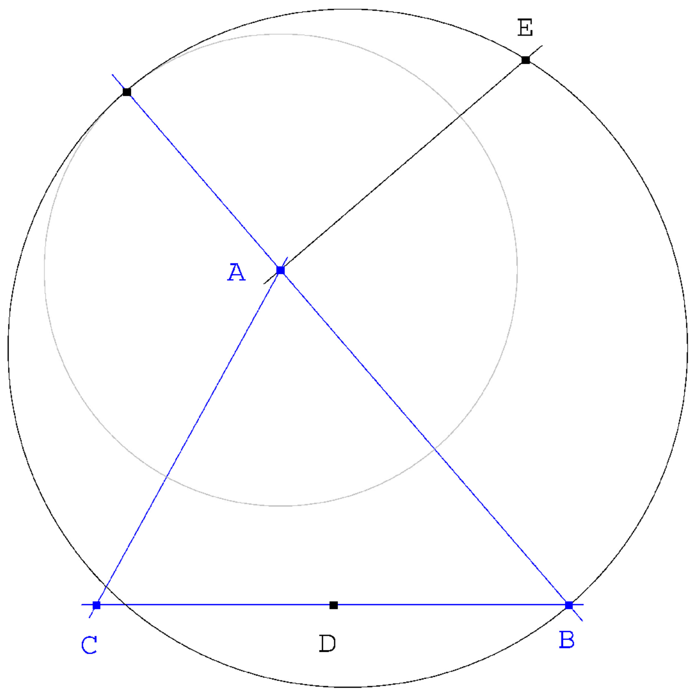
Igualdad de perímetros:

$$MN + m + n = MN + (a - n) + b + (c - m) = MN + (a + b + c) - (m + n)$$

$$\boxed{m + n = \frac{(a + b + c)}{2}}$$

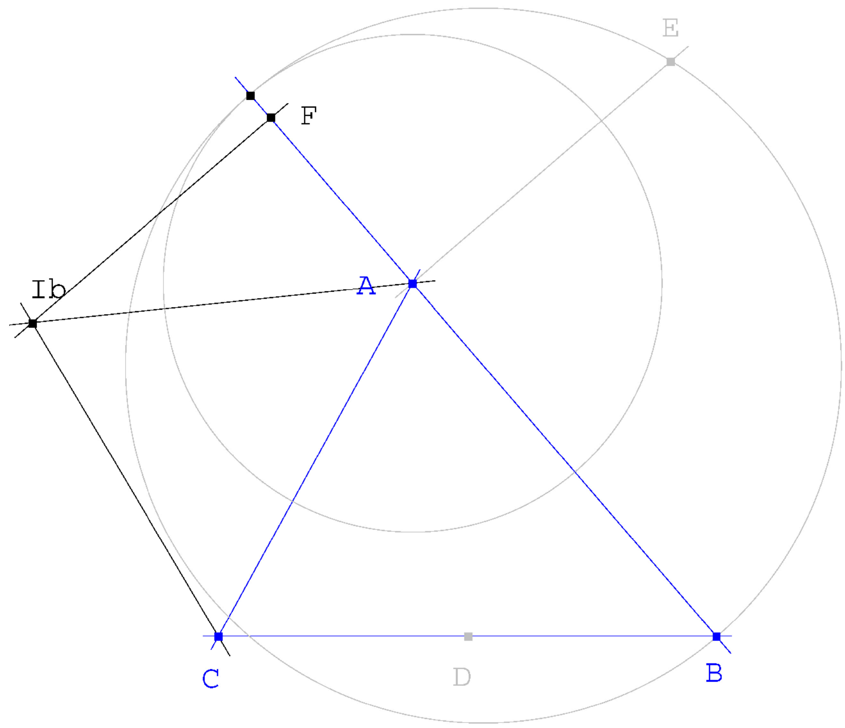
El problema se ha convertido en buscar dos segmentos m y n cuya suma y producto son conocidos.

Problema conocido; pero adecuamos la solución a la configuración de nuestro problema, realizamos la solución encima de nuestra figura, sacando ventaja de ella y economizando construcciones.

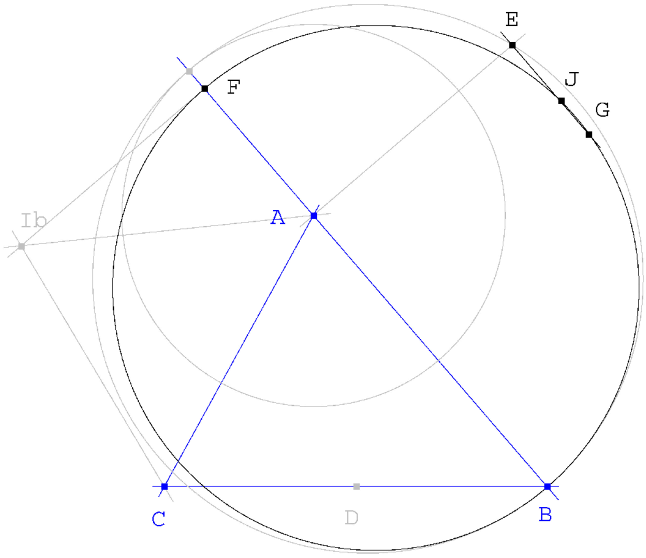


Llevamos, a partir de A, $\frac{a}{2} = DB$, sobre AB y trazamos el círculo de diámetro $\frac{a}{2} + c$.

Perpendicular a AB por A, que corta al círculo anterior en E, y así: $(AE)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)c$



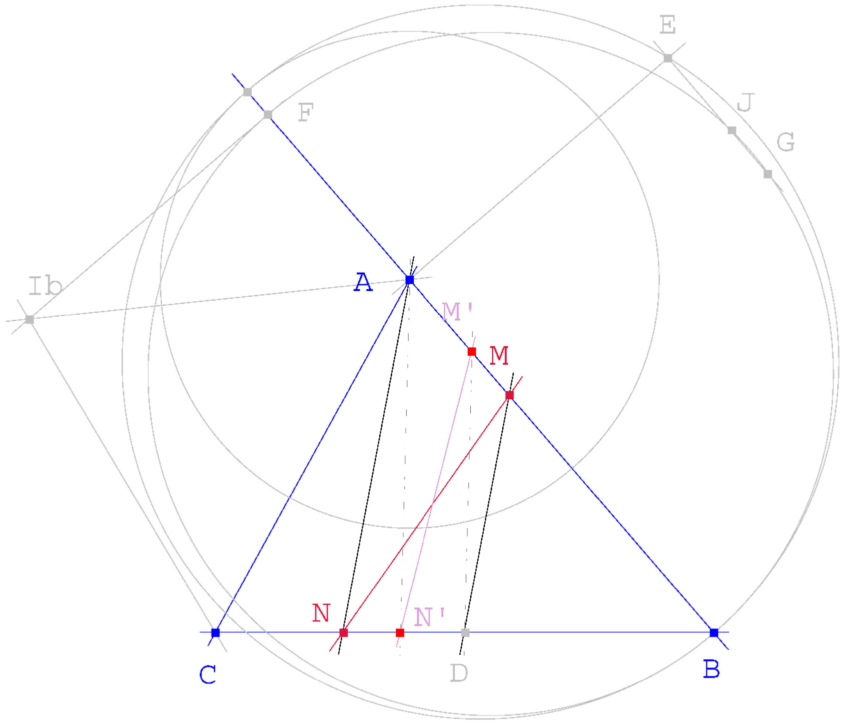
Con el punto de contacto del círculo ex-inscrito opuesto a B determinamos F tal que $BF = \frac{(a+b+c)}{2}$



Trazamos el círculo de diámetro BF , la paralela a AB por E corta a este último en J y G .**(2 soluciones)**. Las perpendiculares a AB por G y J dan M y M' sobre AB .

Los dos segmentos están en la posición necesaria para acabar el problema original:

$$BM \times MF = \left(\frac{a}{2}\right)c \qquad\qquad BM + MF = \frac{(a+b+c)}{2}$$



Tenemos M y sabemos que: $\dfrac{m}{\left(\dfrac{a}{2}\right)} = \dfrac{c}{n} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{BA}{BN}$ por tanto, la paralela por A a MD nos proporciona N en su intersección con BC . Análogamente, obtenemos N', la segunda solución.