PROBLÈME 142 – Solution de Christian Boissinotte – février 2014

1-15 de febrero de 2004

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

Problema 142.- Sobre el teorema de Pitágoras

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, de hipotenusa a, y catetos b y c. En la forma que es usual de demostrar el teorema de Pitágoras, hacemos las siguientes construcciones. 1) Cuadrado ADFH de lado b+c, con la copia de cuatro triángulos , ABC, en su interior, y el cuadrado BEGC, de lado a. 2) Por los vértices consecutivos A y H del cuadrado, construimos para cada uno los rectángulos LBCK, CGIJ, tal que KL//BC y CG//IJ, respectivamente, de área, b c = ah, donde h es la altura de la hipotenusa. 3) Por último, sean los puntos X, Y, y Z, los puntos de intersección de las diagonales de los trapecios ICBE, JGEB, GEBK, respectivamente. Demostrar que : a) El triángulo XYZ, es rectángulo e isósceles, y, encontrar todas las propiedades geométricas del mismo. b) De toda la figura antes descrita encontrar una nueva demostración del Teorema de Pitágoras. c) ***Si con los vértices F y D del cuadrado se procede por simetría**** *de la misma forma, en todas las construcciones hechas, demostrar que el cuadrilátero obtenido es un cuadrado semejante al cuadrado BEGC. Hallar el centro y la razón de la semejanza.*

Romero, J.B. (2004): Comunicación personal.

Solución de Christian Boissinotte

Chargé de cours UQÀM
Conseiller pédagogique CSDM
Québec, Canada

** J'ai reéinterprété ceci comme «procéder à une symétrie axiale du triangle XYZ selon la droite contenant son hypoténuse» pour faire sens avec la suite.*

La partie a) étant déjà résolue, voici une solution des parties b) et c).

b) *Voir figure à la fin.*

Le triangle ABC occupe la moitié du rectangle KLBC, évidemment car son aire est le demi-produit de la base BC et de la hauteur BL=h, (ah = bc).

Le carré TLEI contient donc le carré CBEG d'aire a^2, deux rectangles d'aire totale 4 triangles ABC, ce qui est équivalent en tout au carré ADFH, et en surplus un carré TKCJ d'aire h^2.

Son côté étant égal à a+h, on a

$$(a+h)^2 - h^2 = (b+c)^2$$
$$a(a+2h) = b^2 + 2bc + c^2$$
$$a^2 + 2ah = b^2 + 2bc + c^2$$

mais comme ah = bc, on a le résultat voulu : $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$. C.Q.F.D.

c)

La distance VX du point X au segment BE (de pied V) est

$$\frac{1}{\frac{1}{BC}+\frac{1}{EI}} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+h}} = \frac{1}{\frac{(a+h)}{a(a+h)}+\frac{a}{a(a+h)}} = \frac{a(a+h)}{2a+h}.$$

La distance du point X au segment EG est aussi $\frac{a(a+h)}{2a+h}$ car X est sur la diagonale CE du carré.

La distance WY du point Y au segment EG (de pied W) est aussi $\frac{a(a+h)}{2a+h}$ car XY est parallèle à EG.

La distance VY de V à Y est égale à $a - WY = a - \frac{a(a+h)}{2a+h} = \frac{a^2}{(2a+h)}$ car Y est sur la diagonale BG du carré.

La mesure de XY=VX-VY = $\frac{a(a+h)}{2a+h} - \frac{a^2}{(2a+h)} = \frac{ah}{2a+h}$

Le rapport $\frac{BC}{XY} = \frac{a}{\frac{ah}{2a+h}} = \frac{\boldsymbol{2a+h}}{\boldsymbol{h}}$ est le rapport de similitude demandé.

Les carrés XYX'Z et CBEG ont le même centre, qui est en même temps le centre O de l'homothétie (intersection des traces CX et BY).

C.Q.F.D.