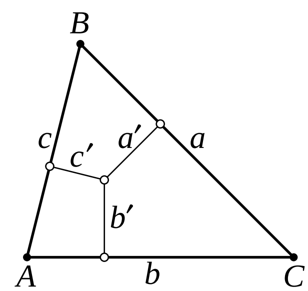
Coordenadas

Francisco J. García Capitán

1. Coordenadas trilineales

Consideramos la notación usual para el triángulo ABC en la que A, B y C representan tanto los vértices como los ángulos y a, b, c son las medidas de los lados BC, CA y AB respectivamente.

Si P es cualquier punto del plano, su posición queda perfectamente determinada por las *ratios* de las distancias con signo del punto a los lados. En efecto, si α, β, γ son conocidos y las distancias son $a' = k\alpha$, $b' = k\beta$, $c' = k\gamma$, podemos determinar el valor de k teniendo en cuenta que, llamando Δ al área del triángulo ABC,

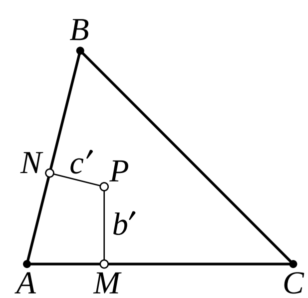


$$\begin{aligned}\Delta =&(ABP) + (BCP) + (CAP) = \\ =&\tfrac{1}{2}c(k\gamma) + \tfrac{1}{2}a(k\alpha) + \tfrac{1}{2}b(k\beta) \Rightarrow k = \frac{2\Delta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.\end{aligned}$$

A los números α, β, γ, proporcionales a las distancias del punto P a los lados del triángulo ABC, se les llama coordenadas trilineales del punto P referidas a ese triángulo. Las escribiremos $\alpha : \beta : \gamma$.

Hagamos los cálculos necesarios para hallar las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto P con coordenadas trilineales $\alpha : \beta : \gamma$.

En el triángulo ABC de la figura consideremos dos vectores unitarios $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ en las direcciones AC y AB respectivamente. Sean m y n las longitudes de los segmentos AM y AN, respectivamente.



Entonces, la igualdad vectorial $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NP}$ se escribe

$$m(u_1,u_2)+k\beta(-u_2,u_1)=(x-a_1,y-a_2)=n(v_1,v_2)+k\gamma(v_2,-v_1).$$

Resolviendo en m y n obtenemos

$$m=\frac{k(u_1v_1+u_2v_2)\beta+k(v_1^2+v_2^2)\gamma}{u_1v_2-u_2v_1},\quad n=\frac{k(u_1^2+u_2^2)\beta+k(u_1v_1+u_2v_2)\gamma}{u_1v_2-u_2v_1},$$

que por ser $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ unitarios se reducen a

$$m=\frac{k(u_1v_1+u_2v_2)\beta+k\gamma}{u_1v_2-u_2v_1},\quad n=\frac{k\beta+k(u_1v_1+u_2v_2)\gamma}{u_1v_2-u_2v_1}.$$

Usando estas fórmulas, el siguiente módulo de *Matemathica*, calcula las coordenadas cartesianas equivalentes a las coordenadas trilineales $\alpha:\beta:\gamma$.

```
dist[x1_, y1_, x2_, y2_] := √((x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2);

Trilineales[a1_, a2_, b1_, b2_, c1_, c2_, α_, β_, γ_] := Module[
   {Δ, u1, u2, v1, v2, k, m, n}, {
    Δ = Abs[Det[{{1, a1, a2}, {1, b1, b2}, {1, c1, c2}}]] / 2;
    a := dist[b1, b2, c1, c2];
    b := dist[c1, c2, a1, a2];
    c := dist[a1, a2, b1, b2];
    u1 := (c1 - a1) / b; u2 := (c2 - a2) / b;
    v1 := (b1 - a1) / c; v2 := (b2 - a2) / c;
    k := 2 Δ / (α a + β b + γ c);
    m := (k (u1 v1 + u2 v2) β + k γ) / (u1 v2 - u2 v1);
     a1 + m u1 - k β u2, a2 + m u2 + k β u1
   }];
```

2. El baricentro

Supongamos que asignamos *pesos* $t_1,\dots,t_n$ a los puntos $A_1,\dots,A_n$, donde $t_1,\dots,t_n$ son números reales cualesquiera.

Si $t_1+\cdots+t_n=0$, el vector $\overrightarrow{u}=t_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+t_n\overrightarrow{OA_n}$ no depende de O ya que si $\overrightarrow{u}=t_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+t_1\overrightarrow{OA_1}$ y $\overrightarrow{v}=t_1\overrightarrow{O'A_1}+\cdots+t_1\overrightarrow{O'A_1}$, entonces

$$\begin{aligned}\vec{u}-\vec{v}=&t_1\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{O'A_1}\right)+\cdots+t_n\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{O'A_n}\right)\Rightarrow\\ =&(t_1+\cdots+t_n)OO'=\overrightarrow{\mathbf{O}}.\end{aligned}$$

Es más interesante el caso en el que $t_1 + \cdots + t_n \neq 0$. Entonces, tenemos $t_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{OA_n} = (t_1 + \cdots + t_n)\overrightarrow{OP}$, siendo P un punto que no depende de O. En efecto, supongamos que

$$\begin{cases} t_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{OA_n} = (t_1 + \cdots + t_n)\overrightarrow{OP}, \\ t_1\overrightarrow{O'A_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{O'A_n} = (t_1 + \cdots + t_n)\overrightarrow{O'P'} \end{cases}.$$

Restando ambas igualdades,

$$(t_1 + \cdots + t_n)\overrightarrow{OO'_1} = (t_1 + \cdots + t_n)\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O'P'}\right),$$

es decir, $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OP}$ y P' coincide con P.

Al punto P se le llama *baricentro* del sistema formado por los puntos $A_1, \ldots, A_n$ con los pesos $t_1, \ldots, t_n$. Tomando $O = P$, el baricentro cumple la relación

$$t_1\overrightarrow{PA_1} + \cdots + t_n\overrightarrow{PA_n} = \overrightarrow{\mathbf{O}}.$$

Si sólo hay dos puntos, tenemos $t_1\overrightarrow{PA_1} = -t_2\overrightarrow{PA_2}$, por lo que P divide al segmento A_1A_2 en la razón $t_2 : t_1$. En particular, si $t_1 = t_2$, P es el punto medio de A_1A_2.

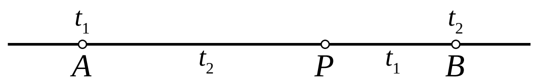
Para un triángulo $A_1A_2A_3$ tenemos

$$\begin{aligned}(t_1 + t_2 + t_3)\overrightarrow{OP} =& t_1\overrightarrow{OA_1} + t_1\overrightarrow{OA_2} + t_3\overrightarrow{OA_1} = \\ =& t_1\overrightarrow{OA_1} + (t_2 + t_3)\overrightarrow{OQ}.\end{aligned}$$

donde Q es el baricentro de A_2 y A_3 con pesos t_2 y t_3. Así, para encontrar el baricentro de tres puntos, podemos sustituir dos de ellos por su baricentro. En particular, cuando $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, Q es el punto medio de A_2A_3, y P divide a A_1Q en la razón $2 : 1$, es decir, el concepto de baricentro que damos aquí coincide con el concepto geométrico de baricentro de un triángulo, el punto de intersección de sus medianas.

3. Coordenadas baricéntricas

Si $t_1 + t_2 \neq 0$, las masas t_1 y t_2 sobre dos puntos fijos A y B determinan un único baricentro P, como se ve en la figura:



Este punto es el mismo A si $t_2 = 0$, y B si $t_1 = 0$. P pertenece al segmento AB si t_1 y t_2 son las dos positivas o las dos negativas. Si nos referimos a la figura, el punto P estará a la derecha de B si $t_1 > -t_2 > 0$, y a la izquierda de A si $t_2 > -t_1 > 0$.

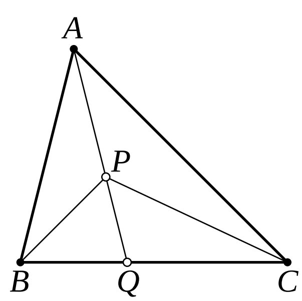
Recíprocamente, dada un punto P de la recta AB, podremos encontrar números t_1 y t_2 tales que

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{PB}{AP},$$

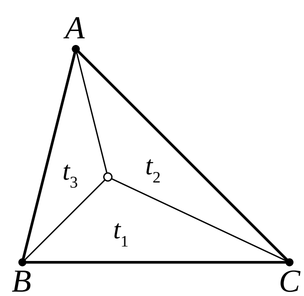
con lo que P será el baricentro de los puntos A y B con masas t_1 y t_2. Como los pesos μt_1 y μt_2 (siendo $\mu \neq 0$) determinan el mismo punto que t_1 y t_2 estas *coordenadas baricéntricas* son homogéneas:

$$(t_1, t_2) = (\mu t_1, \mu t_2) \quad (\mu \neq 0).$$

De forma parecida podemos definir unas coordenadas baricéntricas en el plano de un triángulo de referencia ABC. Si $t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$, los pesos t_1, t_2, t_3 sobre los vértices A, B, C determinan un punto P, el baricentro, cuyas coordenadas son (t_1, t_2, t_3). En particular, las coordenadas de A, B y C son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, respectivamente, y $(0, t_2, t_3)$ es el punto sobre BC cuyas coordenadas respecto de BC son (t_2, t_3). Para hallar las coordenadas baricéntricas de un un punto cualquiera P, hallaremos las coordenadas t_2 y t_3 de un punto Q sobre AP como el de la figura (a) y después hallaremos t_1 como el peso sobre A que equilibre un peso $t_2 + t_3$ sobre Q y haga de P el baricentro de ABC.



(a)



(b)

Aquí, como en el caso caso de unidimensional, estas coordenadas son homogéneas:

$$(t_1, t_2, t_3) = (\mu t_1, \mu t_2, \mu t_3) \quad (\mu \neq 0).$$

Uniendo P con A, B y C descomponemos ABC en tres triángulos que con P como vértice común. *Las áreas de estos triángulos son proporcionales a las coordenadas baricéntricas de P*, como muestra la figura (b). En efecto:

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{BQ}{QC} = \frac{ABQ}{AQC} = \frac{PBQ}{PQC} = \frac{ABQ - PBQ}{AQC - PQC} = \frac{PAB}{PCA},$$

y análogamente para t_1/t_3 y t_2/t_1. Las posiciones de P fuera del triángulo se solucionan con el convenio del área con signo de un triángulo dirigido. La desigualdad $t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$ nos permite normalizar las coordenadas de manera que $t_1 + t_2 + t_3 = 1$. (Basta con que dividamos cada coordenada por la suma de las tres.) Estas coordenadas baricéntricas normalizadas se conocen como *coordenadas area*, ya que expresan exactamente el área de los triángulos PBC, PCA y PAB tomando como unidad el área del triángulo ABC. Las coordenadas área no son homogéneas, pero sí son "redundantes" ya que la posición de un punto queda determinada por dos de ellas. Sin embargo, cualquier expresión en la que aparezcan estas coordenadas puede hacerse homogénea insertando potencias adecuadas de $t_1 + t_2 + t_3$ en el lugar adecuado.

Cualquier recta tiene una ecuación linear homogénea de la forma

$$at_1 + bt_2 + ct_3 = 0.$$

En particular las rectas BC, CA y AB tienen ecuaciones

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0.$$

Si (r) y (s) son los puntos con coordenadas (r_1, r_2, r_3) y (s_1, s_2, s_3), la recta que une (r) y (s) viene dada por

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = 0,$$

y el área del triángulo $(r)(s)(t)$ viene dada por este determinante dividido por

$$(r_1 + r_2 + r_3)(s_1 + s_2 + s_3)(t_1 + t_2 + t_3).$$

Referencias

[1] Eric W. Weisstein. “Trilinear Coordinates.”
MathWorld. A Wolfram Web Resource.
`http://mathworld.wolfram.com/TrilinearCoordinates.html`

[2] Coxeter, H. S. M. *Introduction to Geometry*.
Segunda edición. Nueva York: Wiley, 1969.