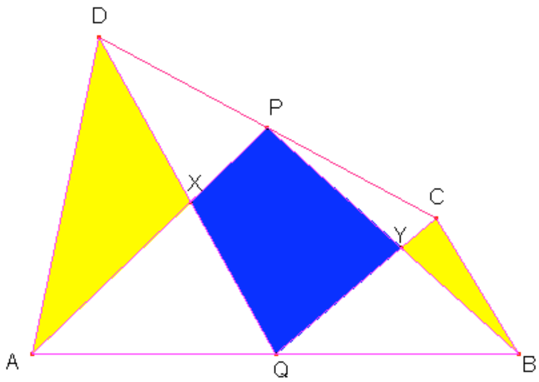
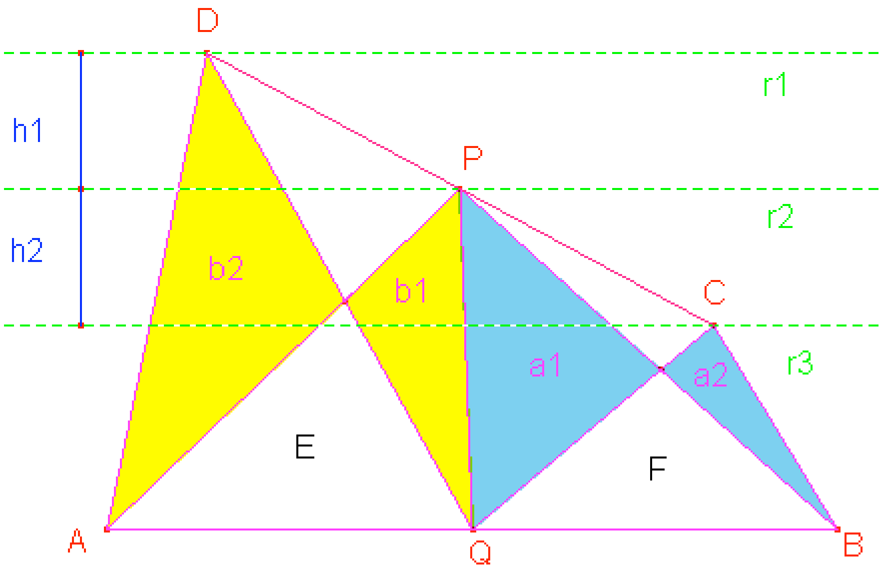
Problema

*Sean **ABCD** un cuadrilátero cualquiera, **P** y **Q** los puntos medios de los lados opuestos **DC** y **AB** respectivamente.*
*Sea **X** la intersección de los segmentos **DQ** y **AP** e **Y** la intersección de **QC** y **PB**.*
*¿Qué relación hay entre las áreas del cuadrilátero **PXQY** y la de los triángulos **ADX** y **BYC**?*



Demostración:



Las rectas **r1**, **r2** y **r3** son paralelas a **AB**.
Por el Teorema de Thales las distancias **h1** y **h2** entre las rectas son iguales, dado que el punto **P** es punto medio de **CD** por construcción.

En la figura podemos considerar 4 triángulos que, de manera que en cada uno, su área es la suma de las áreas de otros dos:

- El área del triángulo **ADQ** = (**b2** + **E**)
- El área del triángulo **APQ = (b1** + **E**)
- El área del triángulo **QPB** = (**a1** + **F**)
- El área del triángulo **QCB** = (**a2** + **F**)

La **diferencia de alturas** entre los triángulos considerados es constante e igual a **h1** = **h2** = **h**. Como, por construcción, la base de esos cuatro triángulos es la misma: la mitad de **AB**, la **diferencia de áreas entre ellos también es constante.**
Llamemos Δ a esa diferencia de áreas. **(Δ = (AB/2*h)/2)**

Podemos establecer estas relaciones de áreas:

$$\left.\begin{array}{l} a1+F=a2+F+\Delta \\ b2+E=b1+E+\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a1=a2+\Delta \\ b2=b1+\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow a1-b2=a2-b1 \Rightarrow \left\| a1+b1=a2+b2 \right\|$$

c.q.d.

Jesús Murillo Ramón
jmurillo@dmc.unirioja.es
Jose Francisco Martín Olarte
jose-francisco.martin@dmc.unirioja.es
Dto de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja