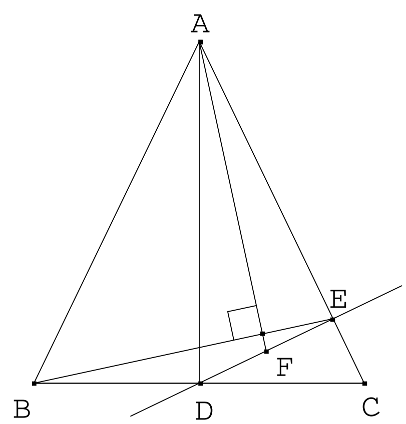
Problema 175
de *trianguloscabri*

Francisco J. García Capitán

Enunciado

En un triángulo ABC es $AB = AC$. D es el punto medio de BC. E es el pie de la perpendicular trazada por D a AC. F es el punto medio de DE. Demostrar que AF es perpendicular a BE.



Solución con coordenadas

Asignamos coordenadas de manera que $D = (0,0)$, $B = (-a,0)$, $C = (a,0)$ y $A = (0,h)$. Entonces las rectas AC y DE tienen ecuaciones $y = h - \frac{h}{a}x$ e $y = \frac{a}{h}x$ respectivamente. El punto de intersección de ambas nos da el punto E:

$$h - \frac{h}{a}x = \frac{a}{h}x \Rightarrow ah^2 - h^2x = a^2x \Rightarrow x = \frac{ah^2}{a^2+h^2}, y = \frac{a^2h}{a^2+h^2}.$$

No perdemos generalidad si suponemos que $a^2 + h^2 = 1$, siendo entonces $E = (ah^2, a^2h)$ y $F = (\frac{1}{2}ah^2, \frac{1}{2}a^2h)$. Ahora podemos calcular los vectores

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= \left(\tfrac{1}{2}ah^2, \tfrac{1}{2}a^2h - h\right) = \left(\tfrac{1}{2}ah^2, \tfrac{1}{2}(a^2h - 2h)\right) \sim (ah, a^2 - 2),\\
\overrightarrow{BE} &= \left(ah^2 + a, a^2h\right) \sim (h^2 + 1, ah).
\end{aligned}$$

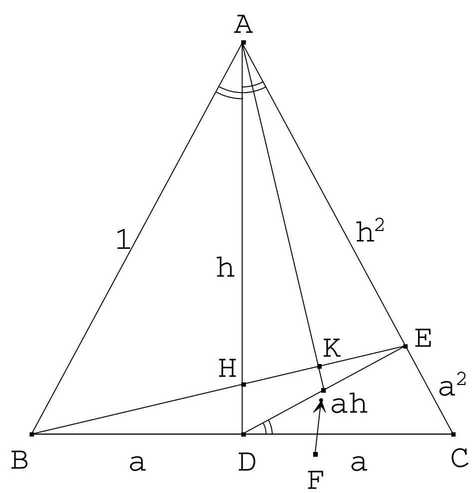
Y como se cumple que

$$(ah, a^2 - 2) \cdot (h^2 + 1, ah) = ah(h^2 + 1) + ah(a^2 - 2) = ah(h^2 + a^2 - 1) = 0,$$

los vectores $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BE}$ son perpendiculares.

Solución con trigonometría

Una alternativa para evitar la geometría analítica es usar un mínimo de trigonometría y triángulos semejantes.



La figura está llena de triángulos semejantes: $ABD \sim ADE \sim DCE$, lo que permite completar las medidas como se indican. Aplicando el teorema del coseno al triángulo BDE, obtenemos el segmento BE:

$$BE^2 = a^2 + a^2h^2 - 2a \cdot ah \cdot (-h) = a^2 + 3a^2h^2 \Rightarrow BE = a\sqrt{3h^2 + 1}.$$

Este resultado también podría haberse obtenido aplicando la fórmula de la mediana al triángulo BCE. Aplicando de nuevo el teorema del coseno al triángulo BDE,

$$\cos\angle DBE = \frac{a^2(1+3h^2)+a^2-a^2h^2}{2\cdot a\sqrt{1+3h^2}\cdot a} = \frac{1+h^2}{\sqrt{1+3h^2}}.$$

Ahora calculamos AF como mediana del triángulo ADE, teniendo en cuenta la condición $a^2+h^2=1$:

$$\begin{aligned} AF^2 &= \frac{h^2+h^4}{2} - \frac{a^2h^2}{4} = \frac{h^2(2+2h^2-a^2)}{4} = \frac{h^2(3h^2+1)}{4} \\ \Rightarrow AF &= \frac{h\sqrt{3h^2+1}}{2}. \end{aligned}$$

El teorema del coseno aplicado al triángulo ADF nos da el ángulo FAD:

$$\begin{aligned} \cos\angle FAD =& \frac{\frac{h^2(3h^2+1)}{4}+h^2-\frac{a^2h^2}{4}}{2\cdot\frac{h\sqrt{3h^2+1}}{2}\cdot h} = \frac{\frac{3h^2+1}{4}+1-\frac{a^2}{4}}{\sqrt{3h^2+1}} = \\ =& \frac{1+h^2}{\sqrt{3h^2+1}}. \end{aligned}$$

Se deduce entonces que los triángulos HBD y HAK tienen dos ángulos iguales, por lo que son semejantes, resultando recto el ángulo K.