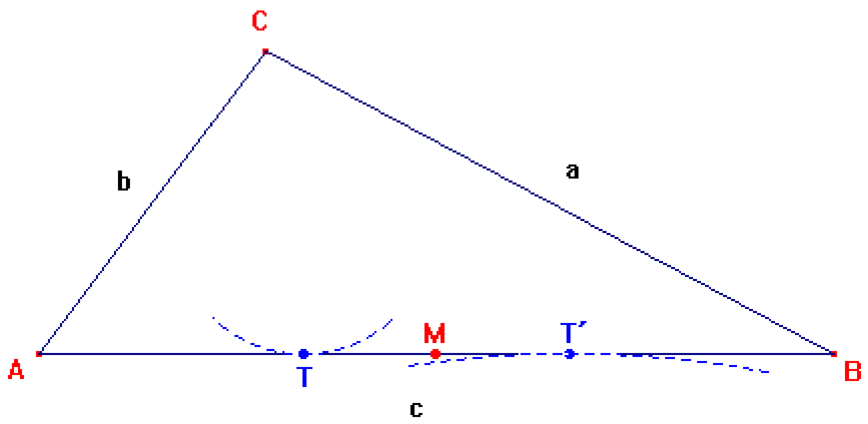
Sea TT´ la distancia, medida sobre el mismo lado, que hay desde la tangencia de la circunferencia inscrita hasta la tangencia de la circunferencia exinscrita correspondiente.

<u>TEROREMA</u>

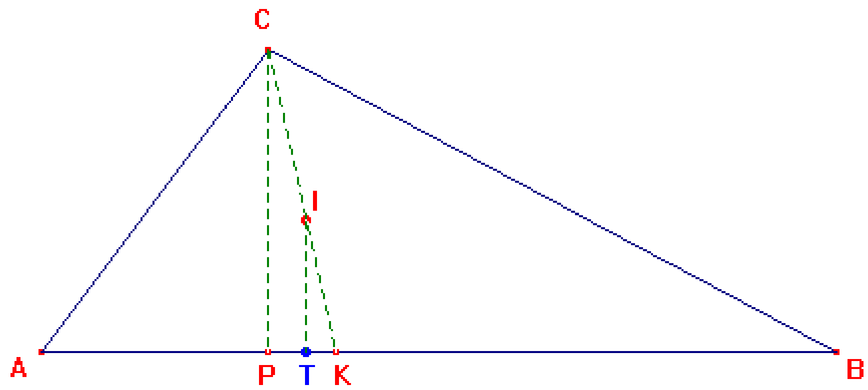
TT´ = |a-b|

Además, si M es el punto medio del lado AB, TM = MT´



CÁLCULO DE AT

En la siguiente figura I es el incentro, y tanto el radio de la



circunferencia inscrita IT como la altura CP son perpendiculares al lado AB. Por ello, los triángulos CPK e ITK son semejantes, cumpliéndose

$$\frac{CP}{IT} = \frac{PK}{TK} \quad \Rightarrow \quad \frac{CP}{IT} = \frac{AK - AP}{TK} \qquad \text{(I)}$$

Ahora bien, la bisectriz CK divide al lado AB en la razón de los lados que contienen al ángulo biseccionado

$\frac{AC}{AK} = \frac{CB}{KB}$ o lo que es lo mismo $\frac{b}{AK} = \frac{a}{c - AK} \Rightarrow AK = \frac{bc}{a+b}$

Por otro lado, aplicando el teorema del coseno en el triángulo ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, senA = b^2 + c^2 - 2bc\frac{AP}{b} \Rightarrow AP = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Se sabe, también, que el área del triángulo ABC es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABI, BCI y CAI , donde IT es el radio de la circunferencia inscrita, por lo que

$$\frac{AB \text{ x } CP}{2} = \frac{AB \text{ x } IT}{2} + \frac{BC \text{ x } IT}{2} + \frac{CA \text{ x } IT}{2} = IT(\frac{a+b+c}{2}) \Rightarrow c\frac{CP}{2} = IT(\frac{a+b+c}{2}) \Rightarrow$$

$IT = \frac{c\frac{CP}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} \Rightarrow \frac{CP}{IT} = \frac{a+b+c}{2}$ La proporción (I) quedaría

$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{\frac{bc}{a+b} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}}{TK} \Rightarrow TK = \frac{a^3 - b^3 + a^2b - ac^2 - ab^2 + bc^2}{2(a+b)(a+b+c)} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-c)}{2(a+b)(a+b+c)} = \frac{(a+b-c)(a-b)}{2(a+b)}$$

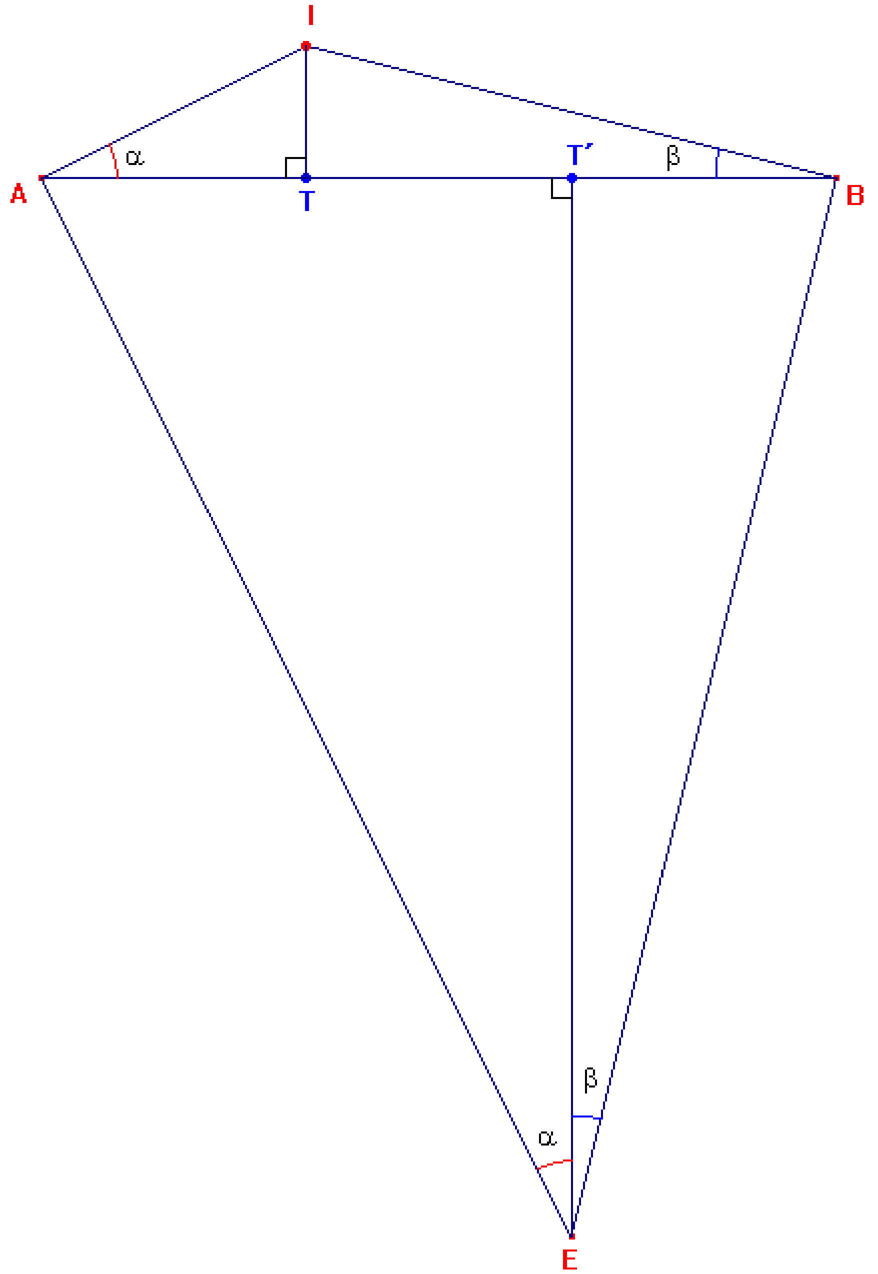
Así,

$$AT = AK - TK = \frac{bc}{a+b} - \frac{(a+b-c)(a-b)}{2(a+b)} = \frac{2bc - a^2 + b^2 - bc + ac}{2(a+b)} = \frac{(-a+b+c)(a+b)}{2(a+b)} =$$

$$= \frac{-a+b+c}{2}$$

CÁLCULO DE BT´

En la siguiente figura, E es el centro de la circunferencia exinscrita.



La perpendicularidad entre la bisectriz interior IB y la bisectriz exterior EB asegura la semejanza de los triángulos EBT´y BIT. Por análogo motivo, el triángulo AET´es semejante al ATI .

Por tanto, si las proporciones

$\frac{ET'}{BT'}=\frac{TB}{IT}$ y $\frac{ET'}{AT'}=\frac{AT}{IT}$ son divididas miembro a miembro

$$\frac{AT'}{BT'}=\frac{TB}{AT} \Rightarrow \frac{AB-BT'}{BT'}=\frac{AB-AT}{AT} \Rightarrow BT'=AT$$

luego

$$TT'=AB-2AT=c-2\frac{-a+b+c}{2}=a-b$$

siendo esta distancia positiva si a>b.

Al ser $AT=BT'$ se deduce de forma evidente que M (punto medio del lado AB) es equidistante con T y T´.