Problema 207

Es bien conocido que las bisectrices de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los correspondientes lados adjuntos.

Generalizando, consideremos el caso en que los dos segmentos sean proporcionales a los cuadrados de los lados adjuntos.

Tal es el caso de la simediana, que es el simétrico de la mediana respecto a la bisectriz correspondiente al mismo vértice.

Demostrarlo, y una vez demostrado, utilizar tal resultado para obtener el punto de Lemoine, intersección de las tres simedianas.

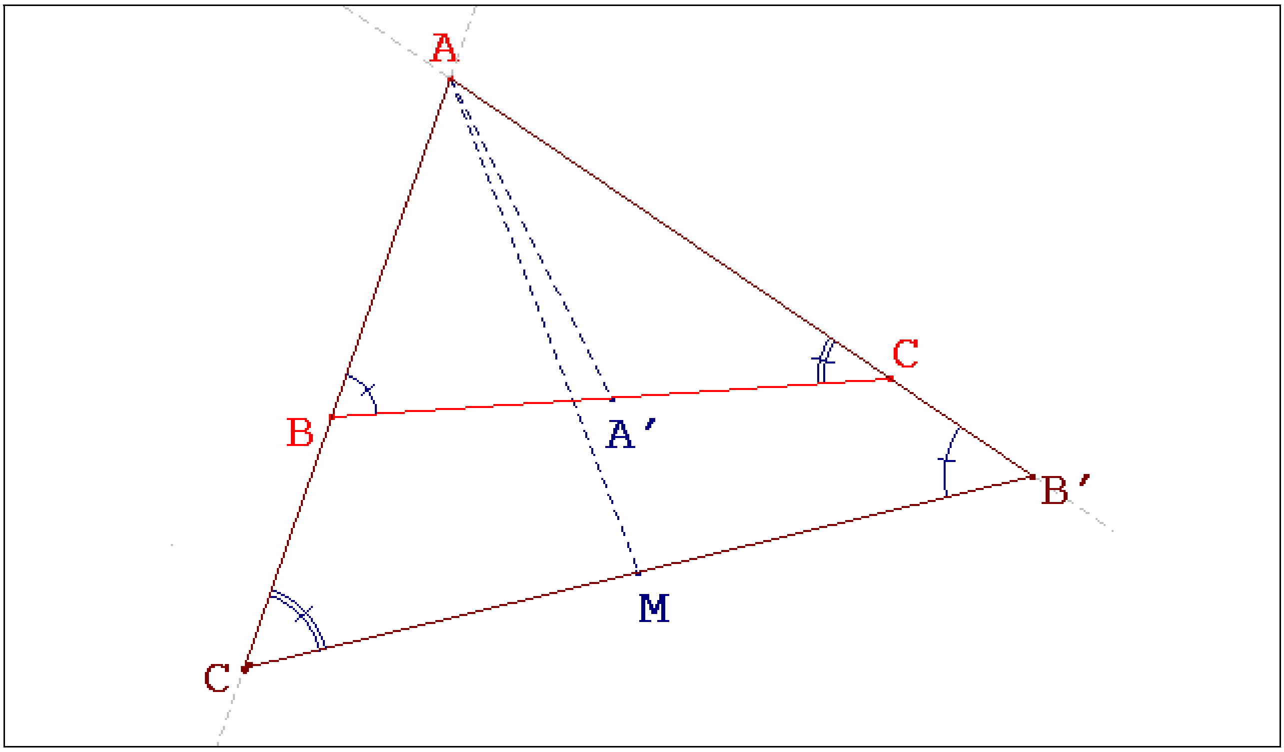
Yevdokimov, O. (2004) Skills of generalization in learning geometry. ARE THE STUDENTS READY TO USE THEM?

Con permiso de su autor, OleksiyYevdokimov, profesor de la Kharkov State Pedagogical University, Ukraine.

Presentado al ICME 10 de Dinamarca.

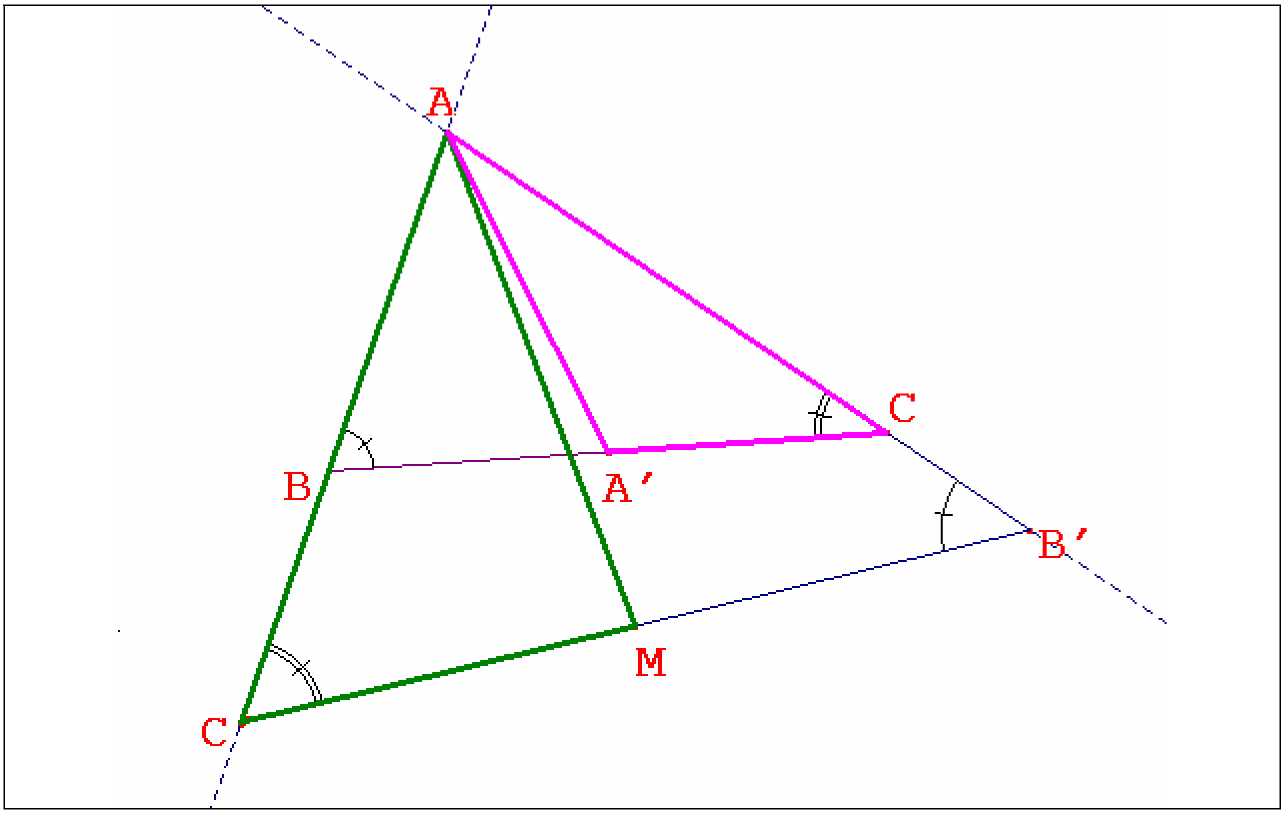
Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

DEFINICIÓN:
La simediana es la ceviana simétrica de la mediana respecto de la bisectriz interior. Esto supone que tanto los lados concurrentes que forman el ángulo como el par formado por la simediana y la mediana poseen la misma bisectriz. Este último hecho permite construir la simediana utilizando las antiparalelas respecto de un ángulo dado. Para ello, veamos la siguiente figura:



En esta figura la recta B'C' es antiparalela respecto del lado BC en el triángulo ABC. Luego los triángulos ABC y AB'C' son semejantes. Si ahora tomamos los puntos medios A' de BC y M del lado C'B' podemos construir los triángulos ACA' y ACM que son semejantes entre sí, ya que tienen iguales los dos ángulos <C = <C' y la razón entre los lados que lo determinan: A'C/AC = C'M/AC' ya que A'C= 1/2·BC y C'M=1/2·C'B'.

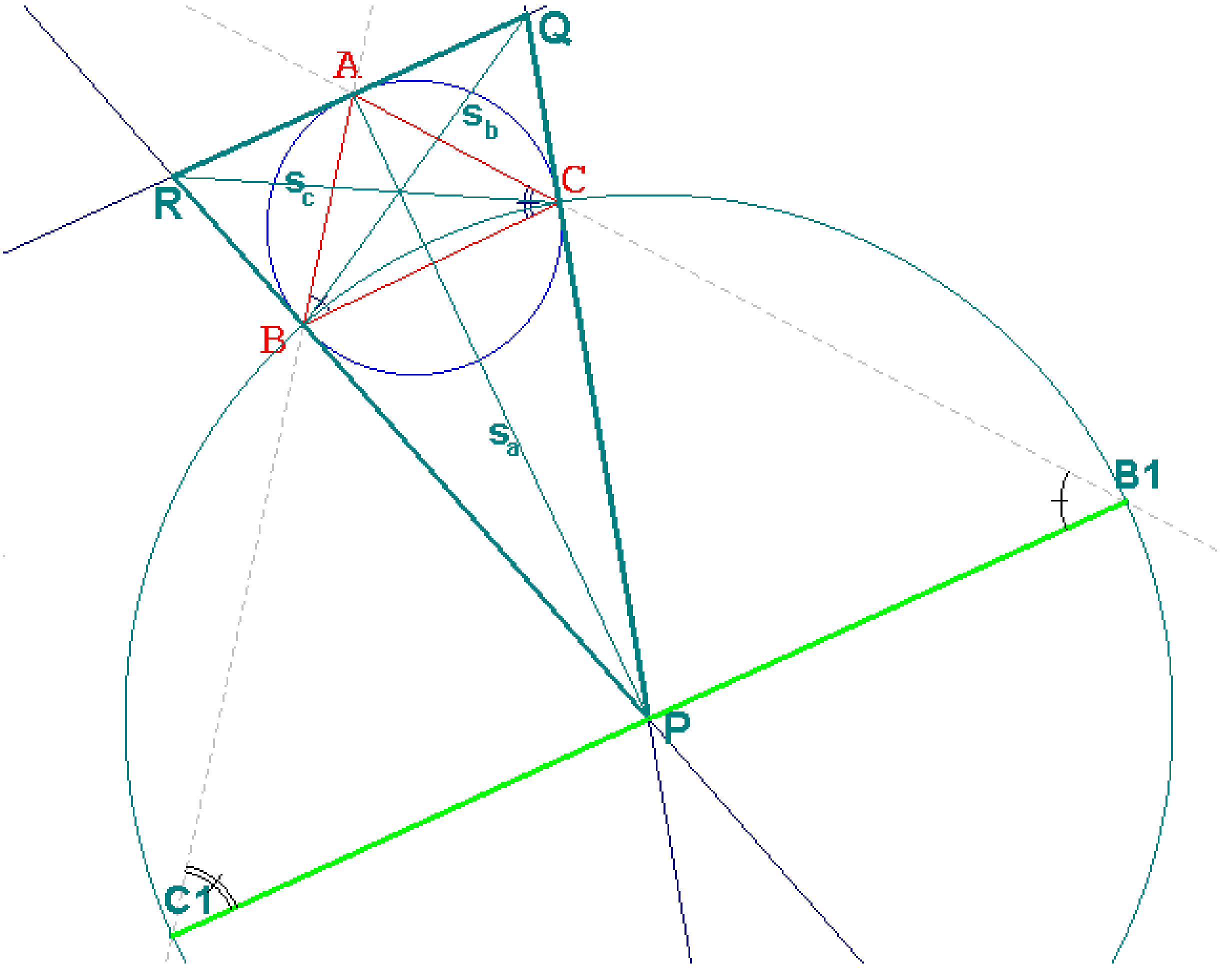
Por tanto, los ángulos <C'AM y <A'AC son iguales. Así el punto M, punto medio de la antiparalela al lado BC del triángulo ABC pertenece a la simediana del ángulo A.
En definitiva, la simediana del ángulo A es el lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas del lado opuesto BC.



<u>CONSTRUCCIÓN DE LAS SIMEDIANAS.</u>

Basándonos en el anterior punto, podemos señalar cómo construir las simedianas relacionándolas con las tangentes de la circunferencia circunscrita trazadas por los vértices del triángulo dado.

En efecto, si determinamos las tangentes por los vértices B y C, ambas rectas se cortarán en P, punto que se encuentra en la mediatriz del lado BC. Si trazamos la circunferencia de centro el punto P y como radio PB =PC, determinarán sobre la prolongación de los lados AB y AC dos puntos B_1 y C_1, equidistantes de P y que forman una antiparalela al lado BC. Como P es el punto medio de este segmento, uniendo A con P obtenemos la simediana s_a. De forma análoga obtendríamos las simedianas s_b y s_c. (Véase la figura al respecto.)



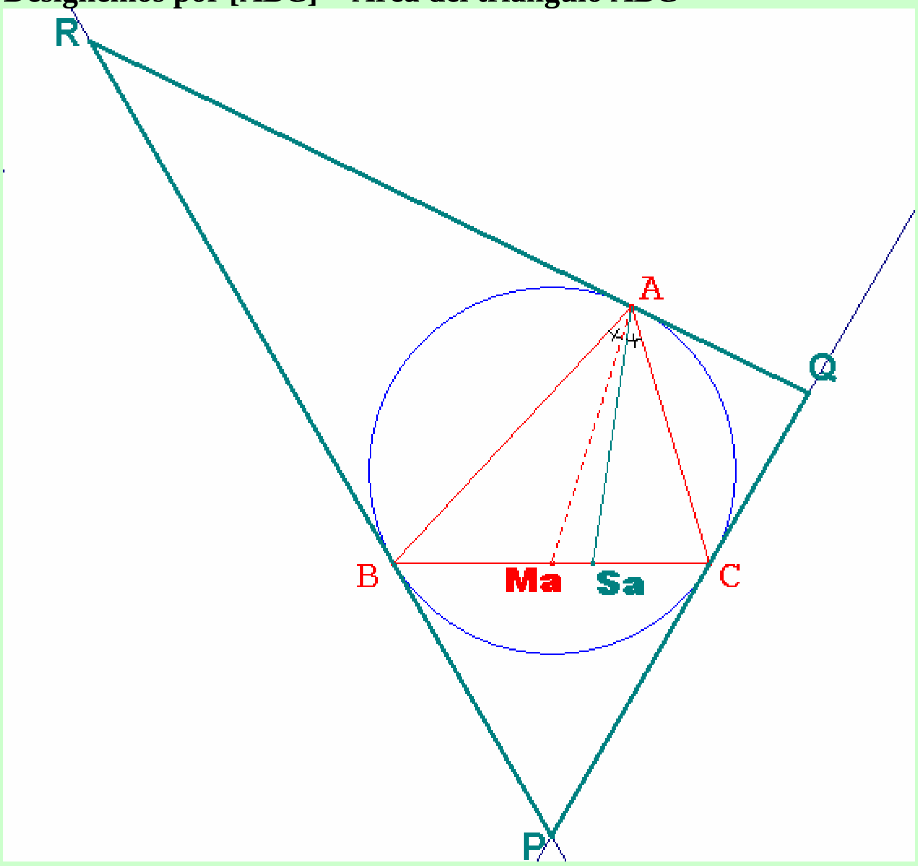
PROPIEDAD DE LAS SIMEDIANAS (I).

La simediana intercepta al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo correspondiente.

Dem.-
Para aclarar este hecho, sea S_a el punto donde la simediana s_a corta al lado BC.
Sea M_a el punto medio del lado BC y sea m_a la mediana AM_a.
Designemos por $x = BSa$; $y = S_aC$.
Por supuesto se tiene que $x + y = a$.

Probaremos ahora que: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{x}{y}$

Designemos por [ABC] = Area del triángulo ABC



(1) $[BAM_a] = 1/2 \cdot c \cdot m_a \cdot sen\ (<BAM_a) = 1/2 \cdot a/2 \cdot h_a$

(2) $[CAS_a] = 1/2 \cdot b \cdot s_a \cdot sen\ (<CAS_a) = 1/2 \cdot y \cdot h_a$

(3) $[BAS_a] = 1/2 \cdot c \cdot s_a \cdot sen\ (<BAS_a) = 1/2 \cdot x \cdot h_a$

(4) $[M_aAC] = 1/2 \cdot b \cdot m_a \cdot sen\ (<M_aAC) = 1/2 \cdot a/2 \cdot h_a$

Teniendo en cuenta las igualdades de ángulos $<BAM_a = <CAS_a$; $<BAS_a = <M_aAC$, entonces:

De (1) y (4) obtenemos que: $\frac{c.sen(< BAM_a)}{b.sen(< M_aAC)} = 1$

De (2) y (3) obtenemos que: $\frac{b.sen(< CAS_a)}{c.sen(< BAS_a)} = \frac{y}{x}$

Dividiendo ahora estas dos últimas expresiones resultará que: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{x}{y}$

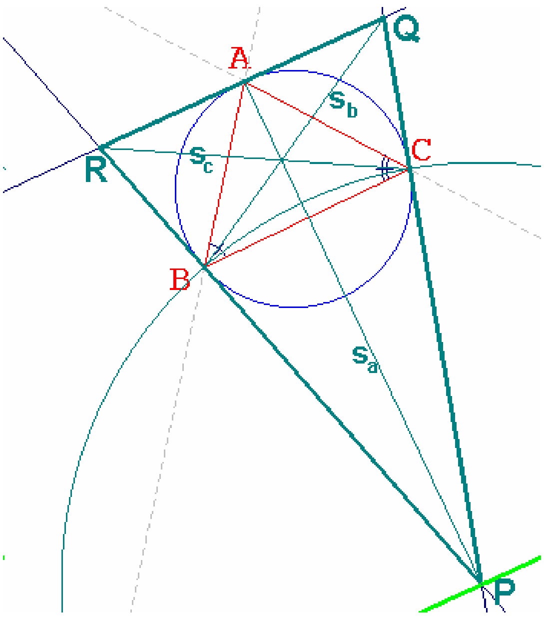
PROPIEDAD DE LAS SIMEDIANAS (II).

Las tres simedianas de un triángulo dado se cortan en un punto L (Punto de Lemoine)

Dem.-

Para mostrar esta propiedad observamos que las tres simedianas del triángulo ABC dado coinciden con las cevianas que unen en el triángulo tangencial asociado PQR, los puntos de contacto de dicho triángulo con la circunferencia inscrita (G, Punto de Gergonne) o, dependiendo de la configuración inicial del triángulo dado con los puntos de contacto de alguna de las circunferencias exinscritas según corresponda.

PRIMERA DEMOSTRACIÓN



Caso en el que la circunferencia circunscrita al triángulo inicial queda como inscrita en el triángulo tangencial.

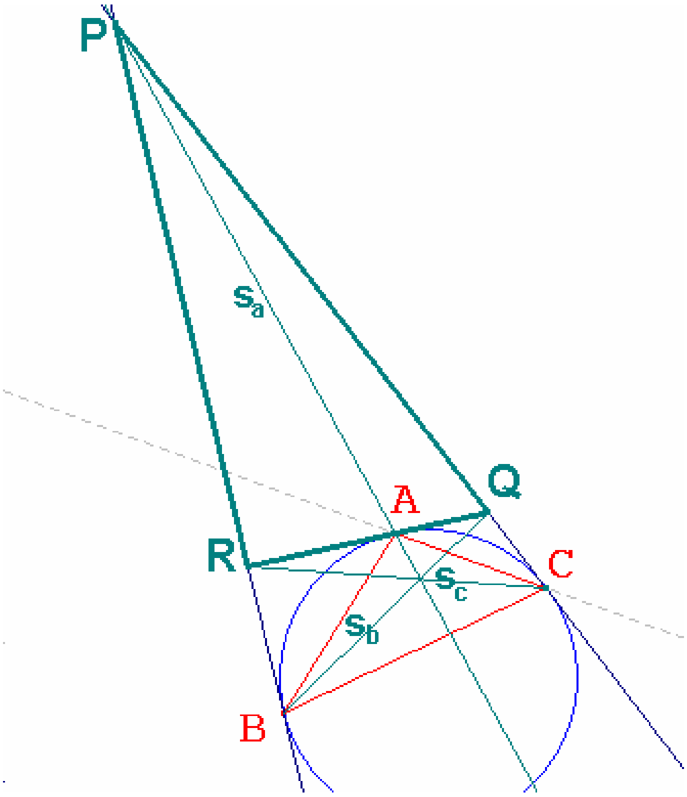
$s_a \cap s_b \cap s_c = L = G$ **(G = Gergonne)**

Veamos que en verdad se da la siguiente relación $\frac{RA}{AQ}.\frac{QC}{CP}.\frac{PB}{BR}=1$ **ya que así entonces, por el Teorema de Ceva, las tres cevianas son concurrentes.**

Si llamamos p = QR, q = RS, r = PQ y 2.t = p + q + r, entonces:

$$\frac{RA}{AQ}.\frac{QC}{CP}.\frac{PB}{BR}=\frac{t-r}{t-q}.\frac{t-q}{t-p}.\frac{t-p}{t-r}=1$$

Luego en efecto,
$s_a \cap s_b \cap s_c = G$ **(G = Gergonne)**



Caso en el que la circunferencia circunscrita al triángulo inicial queda como exinscrita en el triángulo tangencial.

$s_a \cap s_b \cap s_c = L$

Veamos que verdad se da la siguiente relación $\frac{RA}{AQ}.\frac{QC}{CP}.\frac{PB}{BR}=1$ **ya que así entonces, por el Teorema de Ceva, las tres cevianas son concurrentes.**

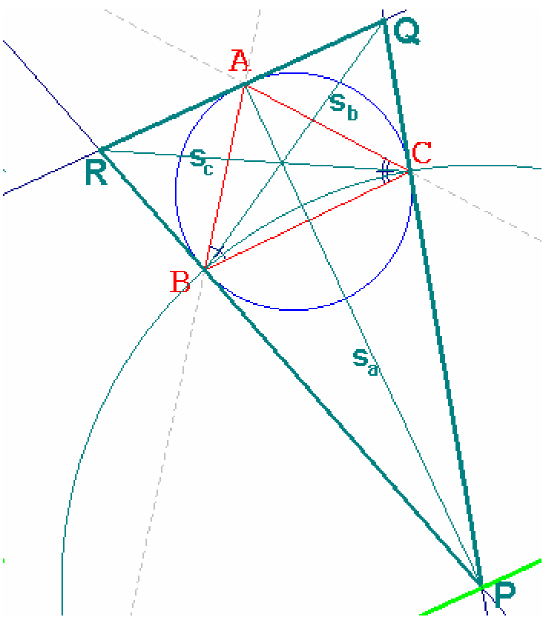
Si llamamos p = QR, q = RS, r = PQ y 2.t = p + q + r, entonces:

$$\frac{RA}{AQ}.\frac{QC}{CP}.\frac{PB}{BR}=\frac{t-q}{t-r}.\frac{t-r}{t}.\frac{t}{t-q}=1$$

Luego en efecto,
$s_a \cap s_b \cap s_c = L$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

Podemos probar esta propiedad basándonos directamente en la propiedad (I) antes demostrada.
Si s_a, s_b y s_c son las simedianas del triángulo ABC de lados a, b y c, y las simedianas interceptan en los lados opuestos dos segmentos que están en la misma razón que los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo correspondiente, entonces se verifica que:



$$\frac{AS_b}{S_bC}\cdot\frac{CS_a}{S_aB}\cdot\frac{BS_c}{S_cA}=\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}=1$$

y, consecuentemente, por el Teorema de Ceva, las tres simedianas concurren en un punto conocido como *Punto de Lemoine.*