Para el aula

Propuesto por Maite Peña Alcaraz, estudiante de Industriales en de Comillas (Madrid)

Problema 212 del Laboratorio Virtual de Triángulos con Cabri II.

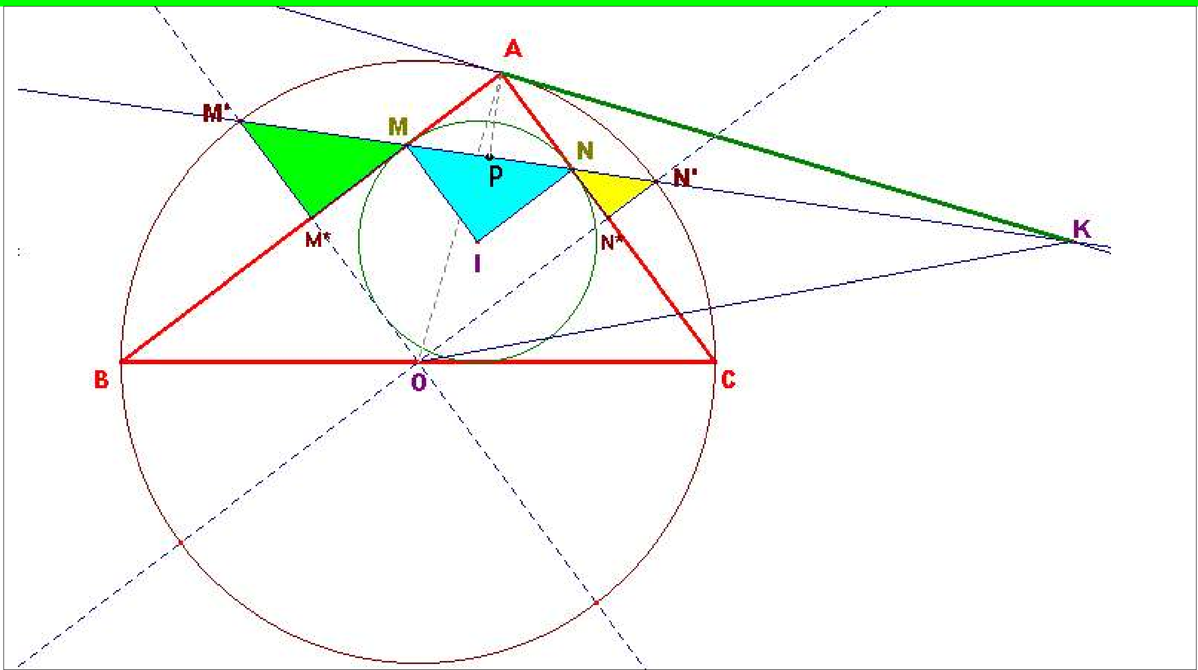
Problema 731: Sea el triángulo ABC rectángulo en A, tracemos los círculos inscrito y cincunscrito. Sean M y N los puntos de tangencia del primero con los lados AB y AC.

Tracemos la tangente al circunscrito en el punto A. Esta tangente y la recta MN se contan en un punto K.

Hallar la distancia AK, siendo los catetos AB = 4 m y AC = 3 m

A. M. De Ingenieros Aeronáuticos. (1949). Ejercicios Propuestos de la Gaceta Matemática 1ª Serie, Tomo 1 Madrid (7 de Abril) Instituto "Jorge Juan" de matemáticas y Real Sociedad Matemática Española. Consejo Superios De Investigaciones Científicas, Patronato "Alfonso el Sabio". (Madrid)

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



1ª ETAPA: CÁLCULO DE LOS DATOS NECESARIOS

Realizada la construcción solicitada, determinamos los siguientes cálculos:

El radio R de la circunferencia circunscrita es igual a la mitad de la hipotenusa del triángulo ABC; R= 5/2.

El radio r de la circunferencia inscrita es igual a 1, ya que si:
Area (ABC) =1/2.3.4 = 12 = s.r = 6.r;
donde s es el semiperímetro del triángulo ABC, entonces r = 1.

AM = AN= r = 1

Cortamos las mediatrices de los lados AB y AC con la semicircunferencia circunscrita, obteniendo así los puntos M’ y N’, respectivamente.

Al considerar el triángulo de vértices M*(punto medio de AB), M’ y M, tenemos que M*M’=MM*, ya que:
M*M’=5/2-3/2=1, por ser OM*=3/2
MM*=2-1=1.

Por tanto el triángulo rectángulo en M* es isósceles y así el ángulo en M es de 45º y por tanto, los puntos M’, M y N son colineales.

De igual manera probaremos que los puntos N’, M y N son también colineales.
En el triángulo de vértices N*(punto medio de AC), N’ y N, tenemos que N*N’=NN*, ya que:
N*N’=5/2-2=1/2, por ser ON*=2
NN*=3/2-1=1/2.

Por tanto el triángulo rectángulo en N* es isósceles y el ángulo en N será de 45º y por ello, los puntos N’, N y M son colineales.

2ª ETAPA: RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

En esta etapa consideramos los siguientes hechos geométricos de interés:

1.- La potencia del punto K respecto de la circunferencia circunscrita, Pot(K,R)=AK²=KN’. KM’

AK² = KN’ . (KN’+ N’N + NM + MM’)

Si llamamos x= KN’, entonces: $AK^2 = x.(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}) = x^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}x$

2.- Por otro lado, en el triángulo APK, rectángulo en P, tenemos que:

AK² = AP² + PK² , entonces: $AK^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{5}{2} + 2\sqrt{2}.x$

3.- Igualando ambas expresiones de AK², obtenemos que:

$$x^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}x = x^2 + \frac{5}{2} + 2\sqrt{2}.x\,;\;\; \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{5}{2}\,;\;\; x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

En definitva, $AK^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}.\frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 25;$

Y por tanto, AK= 5 m.