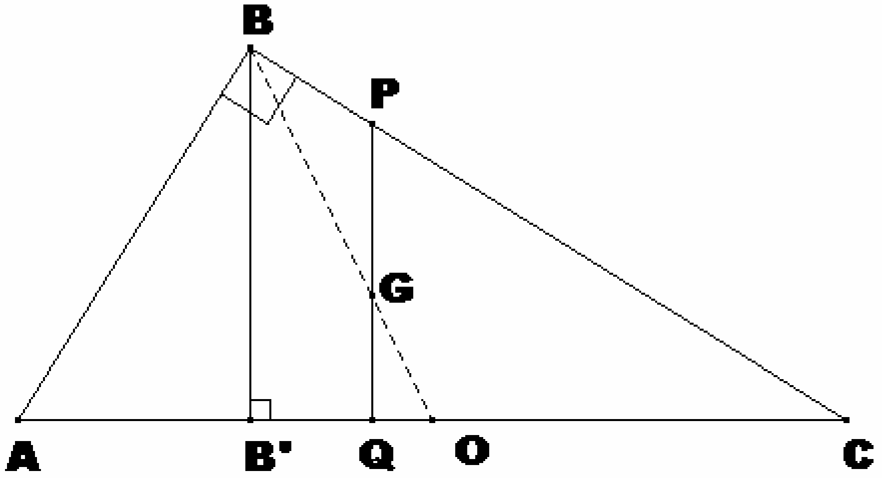
Problema 217

Propuesto por William Rodríguez Chamache.
Profesor de Geometría de la "Academia Integral Class" Trujillo- Perú.

Si ABC es rectángulo y "G" su baricentro calcula la relación: $\dfrac{PG}{GQ}$

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Si nombramos, como es costumbre a los lados AB = c, BC = a, AC = b, tenemos que en este triángulo rectángulo en B; $b^2 = a^2 + c^2$.

- Si h_b =BB' entonces GQ= 1/3·h_b. Como se tiene que h_b = a·c/b, entonces $GQ = \dfrac{a.c}{3.b}$
- Para calcular el segmento PG, determinaremos el segmento PQ.
  Como quiera que: < GOQ = 2·< C, tenemos que:

  $$\cos 2C = \frac{OQ}{OG} = \frac{OQ}{\frac{1}{3}.OB} = \frac{OQ}{\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.b} = \frac{6.OQ}{b}$$

  $$\cos 2C = \cos^2 C - \operatorname{sen}^2 C = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2 - c^2}{b^2}$$

  Igualando ambas expresiones, deducimos que: $OQ = \dfrac{a^2 - c^2}{6.b}$
- Por otro lado,

  $$\operatorname{tag}C = \frac{c}{a} = \frac{PQ}{OQ + \frac{b}{2}} \to PQ = \frac{c}{a}.\left(OQ + \frac{b}{2}\right) = \frac{c}{a}.\frac{(a^2 - c^2 + 3b^2)}{6b} = \frac{c.(a^2 - c^2 + 3b^2)}{6.a.b}$$
- En definitiva, $PQ = \dfrac{c.(a^2 + b^2)}{3.a.b} \to PG = PQ - GQ = \dfrac{c.(a^2 + b^2)}{3.a.b} - \dfrac{a.c}{3.b} = \dfrac{c.b}{3.a}$;
- Por fin, $PG = \dfrac{c.b}{3.a}$ y $GQ = \dfrac{a.c}{3.b}$, de donde: $\dfrac{PG}{GQ} = \dfrac{\cancel{b.c}/3.a}{\cancel{a.c}/3.b} = \dfrac{b^2}{a^2}$; $\dfrac{PG}{GQ} = \dfrac{b^2}{a^2}$