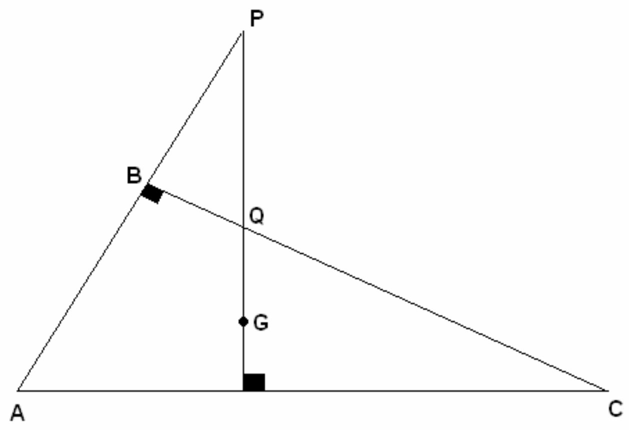
Problema 224

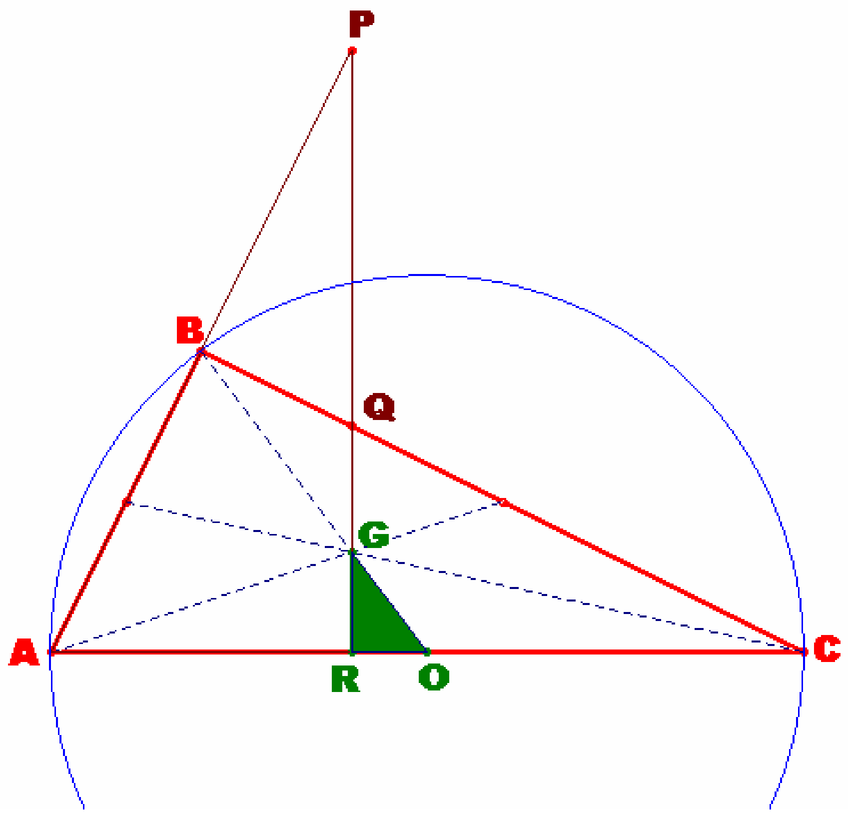
En la siguiente gráfica se cumple que: $\frac{PQ}{QG}=\frac{3}{1}$, y ABC es rectángulo si "G" su baricentro calcular el ángulo ACB



Propuesto por: William Rodríguez Chamache.
Profesor de Geometria de la "Academia integral class" Trujillo- Perú.
Rodríguez, W. (2005): Comunicación personal.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sea el triángulo ABC, de catetos AB = c , BC = a y de hipotenusa AC = b. Por tanto, se tendrá que $a^2 + c^2 = b^2$. Hallaremos además la relación particular existente entre dichos lados para así poder caracterizar el ángulo ACB.



Sea α=<ACB. En la figura dada tenemos que:
α=<ACB=<RPA
Y además 2α=<ROG.
También sabemos que:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{c}{b};\cos\alpha=\frac{a}{b}$$

La longitud OB de la mediana relativa a la hipotenusa es igual al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, es decir, igual a la mitad de la hipotenusa, b/2. Así tenemos que OG=b/6.

En el triángulo rectángulo OGR, tenemos las siguientes relaciones de interés:

$$\operatorname{sen}2\alpha=\frac{GR}{b/6};\quad \operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha=\frac{2ac}{b^2};\qquad \text{Así, } GR=\frac{ac}{3b}$$

Por otro lado:

$$\cos 2\alpha=\frac{OR}{b/6};\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{a^2-c^2}{6b};\ \text{Así, } OR=\frac{a^2-c^2}{6b}$$

Con estos datos de interés, podemos determinar el valor del segmento GQ. Para ello, veamos que: GQ = RQ − GR.

En el triángulo CRQ, tenemos que:

$$\tan\alpha=\frac{RQ}{RC}=\frac{RQ}{CO+OR}=\frac{RQ}{\frac{b}{2}+\frac{a^2-c^2}{6b}}=\frac{RQ}{\frac{a^2-c^2+3b^2}{6b}};$$

$$\tan\alpha=\frac{c}{a}$$

Luego entonces $RQ=\frac{c}{a}.\frac{a^2-c^2+3b^2}{6b}=\frac{c}{a}.\frac{4a^2+2c^2}{6b}$.

Por fin, GQ = RQ − GR ;

$$GQ=\frac{c}{a}.\frac{a^2-c^2+3b^2}{6b}=\frac{c}{a}.\frac{4a^2+2c^2}{6b}-\frac{ac}{3b}=\frac{c(4a^2+2c^2)-2a^2c}{6ab};$$

$$GQ=\frac{c(2a^2+2c^2)}{6ab}=\frac{2cb^2}{6ab}=\frac{cb}{3a}$$

De la condición inicial, $\frac{PQ}{QG}=\frac{3}{1}$, determinamos que PQ=$\frac{cb}{a}$

En el mismo triángulo CRQ, tenemos que: $\cos\alpha=\frac{RC}{QC}=\frac{RO+OC}{QC}=\frac{\frac{a^2-c^2}{6b}+\frac{b}{2}}{QC};$

$$\cos\alpha=\frac{a}{b}$$

$$QC=\frac{b}{a}.\left(\frac{a^2-c^2}{6b}+\frac{b}{2}\right)=\frac{a^2-c^2+3b^2}{6a}=\frac{a^2+b^2}{3a}$$

Por tanto, BQ = BC − QC será igual a:

$$BQ=a-\frac{a^2+b^2}{3a}=\frac{2a^2-b^2}{3a}$$

En el triángulo rectángulo PBQ, semejante al inicial ABC, y por tanto podemos establecer la siguiente relación de igualdad:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{BQ}{PQ}=\frac{\frac{2a^2-b^2}{3a}}{\frac{bc}{a}}=\frac{c}{b};\ \frac{2a^2-b^2}{3}=c^2\Rightarrow a^2=4c^2\Rightarrow a=2c$$

Así encontramos la relación entre los catetos a y c.

De esta manera, el ángulo α=<ACB queda determinado por la relación $\tan\alpha=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.