Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos, respectivamente, por $O(R)$ y $O_0(R_0)$ sus circunferencias circunscrita y de Apolonio (tangente internamente a cada una de las circunferencias exinscritas); sean, además, I el incentro, S el punto de Spieker (centro de la circunferencia inscrita al triángulo medial de $\widehat{ABC}$) y P el centro exterior de semejanza de $O(R)$ y $O_0(R_0)$. Demostrar que P, S e I son colineales y $\dfrac{PI}{PS} = \dfrac{R}{R_0}$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 297.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Quincena del 15 al 28 de febrero de 2006

Propuesto por Juan Carlos Salazar(1), profesor de Geometría del Equipo Olímpico de Venezuela.(Puerto Ordaz); con el siguiente enunciado:

Demostrar que P, S, I, son colineales, y que PI/PS = R/Ro, donde:

P es el centro exterior de semejanza de (O,R) y (Oo,Ro).

(O,R) es la circunferencia circunscrita.

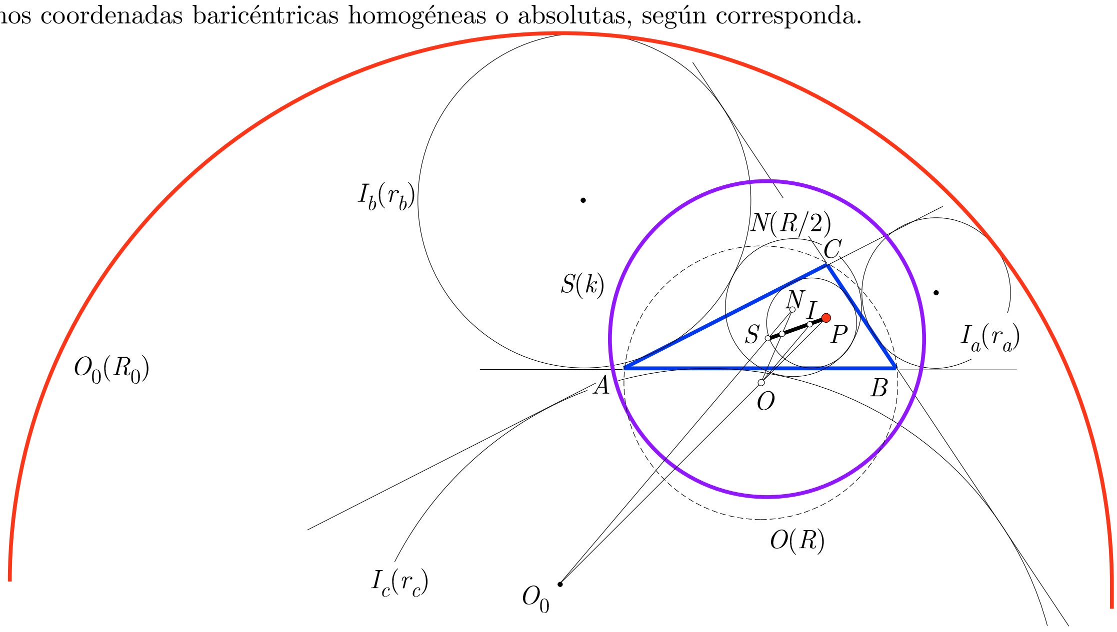
(Oo, Ro) es la circunferencia de Apolonio del triángulo ABC, tangente a las circunferencias exinscritas, con contacto interior a las tres (el contacto entre dos circunferencias es exterior o interior según el punto de tangencia separe o no los centros de las circunferencias). Aclaración (19 febrero 2006)

I es el incentro.

S es el punto de Spieker.

—— - ——

Usaremos coordenadas baricéntricas homogéneas o absolutas, según corresponda.



Esbozo del proceso a seguir:

$O_o(R_0)$ es inversa de $N(R/2)$ respecto a $S(\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2})$, por lo que

$$O_0 = \frac{r^2+2rR+s^2}{2rR}S - \frac{r^2+s^2}{2rR}N, \qquad R_0 = \frac{r^2+s^2}{4r}, \tag{1}$$

donde $N(R/2)$ y $S(\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2})$ son, respectivamente, las circunferencias de los nueve puntos y ortogonal a las circunferencias exinscritas, r es el radio de la circunferencia inscrita y s es el semiperímetro de $\widehat{ABC}$.

El centro exterior de semejanza de $O(R)$ y $O_0(R_0)$ es

$$P = \frac{R_0}{R_0-R}O - \frac{R}{R_0-R}O_0.$$

Como $O = 3G - 2N$ (G baricentro de $\widehat{ABC}$),

(1) El jueves, 3 de abril del 2008, ha aparecido en la página TriangulosCabri la notificación del fallecimiento del profesor Juan Carlos Salazar. Sirva la resolución de este problema, propuesto por él, como mi pequeño homenaje

$$P = \frac{3(r^2+s^2)}{r^2-4rR+s^2}G - \frac{2(r^2+2rR+s^2)}{r^2-4rR+s^2}S. \tag{2}$$

Con lo que P está en la recta GS, lo mismo que $I = 3G - 2S$.

Finalmente,

$$\frac{PI}{PS} = \frac{PO}{PO_0} = \frac{R}{R_0}. \tag{3}$$

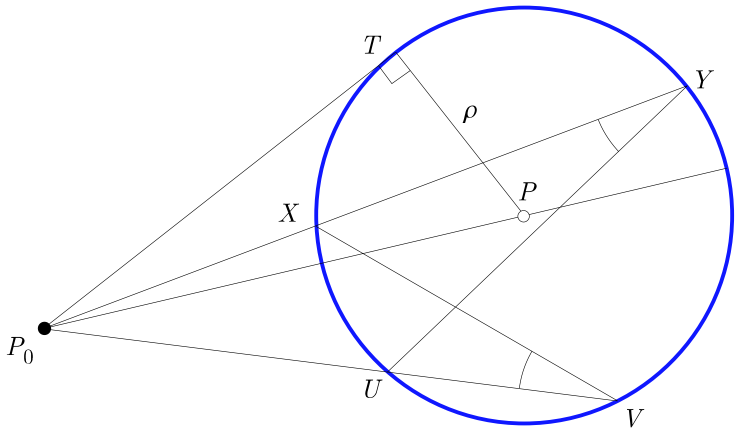
Preliminares:

Tratamos de desarrollar lo expuesto anteriormente, recordando, en seis apartados, ciertos conceptos y resultados (nunca se sabe con certeza hasta donde hay que retroceder para que se pueda comprender bien lo que se va a exponer) que tienen que ver con potencia de un punto respecto a una circunferencia, semejanza e inversión de circunferencias.

1) Potencia de un punto respecto a una circunferencia.

Se llama potencia de un punto respecto de una circunferencia al producto de las distancias desde el punto P_0 a las intersecciones con la circunferencia por una secante arbitraria.

Este valor es independiente de la secante elegida: Si por P_0 se trazan dos secantes cualesquiera P_0XY y P_0UV a la circunferencia $P(\rho)$, de centro en P y radio ρ, los triángulos $\widehat{P_0XV}$ y $\widehat{P_0UY}$ son semejantes, ya que los ángulos $\hat{Y}$ y $\hat{V}$ son iguales, (abarcan el mismo arco). Por tanto, $P_0X/P_0V = P_0U/P_0Y$, de donde $P_0X \cdot P_0Y = P_0U \cdot P_0V = cte$.



Si se toma como secante la recta que pasa por el centro y si d es la distancia de P_0 a P, se tiene que la potencia de P_0 respecto a $P(\rho)$ es $(d-\rho)(d+\rho) = d^2 - \rho^2$. Si se toma la tangente a $P(\rho)$ por P_0 (en caso de que P_0 es exterior a $P(\rho)$) y si T es punto de tangencia, la potencia es P_0T^2.

En consecuencia, si la circunferencia $P(\rho)$ es ortogonal a $P_0(k)$, $P(\rho)$ queda invariante en la inversión respecto a $P_0(k)$.

Vamos ahora a expresar la potencia de un punto respecto a una circunferencia, en términos de coordenadas baricéntricas:

El que (x, y, z) sean las coordenadas baricénticas absolutas de un punto P, respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, quiere decir que

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{b}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{c}}, \qquad x+y+z=1.$$

donde $\overrightarrow{\mathbf{p}}$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ son vectores posición de los puntos P, A, B y C (respecto a cualquier origen).

Si hacemos el producto escalar de $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ por si mismo, se obtiene

$$\overrightarrow{\mathbf{p}}^2 = x^2\,\overrightarrow{\mathbf{a}}^2 + y^2\,\overrightarrow{\mathbf{b}}^2 + z^2\,\overrightarrow{\mathbf{c}}^2 + 2yz\,\overrightarrow{\mathbf{b}}\,\overrightarrow{\mathbf{c}} + 2zx\,\overrightarrow{\mathbf{c}}\,\overrightarrow{\mathbf{a}} + 2xy\,\overrightarrow{\mathbf{a}}\,\overrightarrow{\mathbf{b}} =$$

$$= x^2\,\overrightarrow{\mathbf{a}}^2 + y^2\,\overrightarrow{\mathbf{b}}^2 + z^2\,\overrightarrow{\mathbf{c}}^2 + yz(\overrightarrow{\mathbf{b}}^2 + \overrightarrow{\mathbf{c}}^2 - a^2) + zx(\overrightarrow{\mathbf{c}}^2 + \overrightarrow{\mathbf{a}}^2 - b^2) + xy(\overrightarrow{\mathbf{a}}^2 + \overrightarrow{\mathbf{b}}^2 - c^2) =$$

$$= (x+y+z)\Big(x\,\overrightarrow{\mathbf{a}}^2 + y\,\overrightarrow{\mathbf{b}}^2 + z\,\overrightarrow{\mathbf{c}}^2\Big) - a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Por tanto, si el origen está en el punto P_0,

$$P_0P^2 = x\,P_0A^2 + y\,P_0B^2 + z\,P_0C^2 - a^2yz - b^2zx - c^2xy. \tag{4}$$

Si, en particular, tomamos $P_0 = O$, el circuncentro de $\widehat{ABC}$, y $P(x, y, z)$ en la circunferencia circunscrita $O(R)$ de radio R, resulta que $OP = OA = OB = OC = R^2$; con lo que entonces, de (4) surge que la ecuación de la circunferencia circunscrita es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

Utilizando (4) para un punto dado en coordenadas baricéntricas homogéneas $P(x : y : z)$, poniendo $(x', y', z') = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+x}\right)$, se tiene que:

$$P_0P^2 - \rho^2 = x'\,P_0A^2 + y'\,P_0B^2 + z'\,P_0C^2 - a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y' - \rho^2 =$$

$$= x'(P_0A^2 - \rho^2) + y'(P_0B^2 - \rho^2) + z'(P_0C^2 - \rho^2) - a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y'.$$

Llamando $p = P_0A^2 - \rho^2, q = P_0B^2 - \rho^2$ y $r = P_0C^2 - \rho^2$ (está claro que aquí r no designa el radio de la circunferencia inscrita), se puede escribir

$$P_0P^2 - \rho^2 = px' + qy' + rz' - a^2y'z' - b^2z'x' - c^2x'y'$$

$$P_0P^2 - \rho^2 = \frac{1}{(x+y+z)^2}\left((x+y+z)(px+qy+rz) - a^2yz - b^2zx - c^2xy\right). \tag{5}$$

Si $P(x : y : z)$ está sobre la circunferencia $P_0(\rho)$, se satisface:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(px+qy+rz) = 0.$$

que es la ecuación de una circunferencia general.

Los coeficientes p, q y r son las potencias de los vértices A, B y C, respecto de la circunferencia $P_0(\rho)$ y la potencia de un punto cualquiera $P(x : y : z)$, respecto a $P_0(\rho)$, está dada por la fórmula (5).

Los puntos P del eje radical de las circunferencias $P_0(\rho)$ y $O(R)$, son los que tienen igual potencia respecto a ambas; es decir,

$$P_0P^2 - \rho^2 = OP^2 - R^2.$$

Con lo que

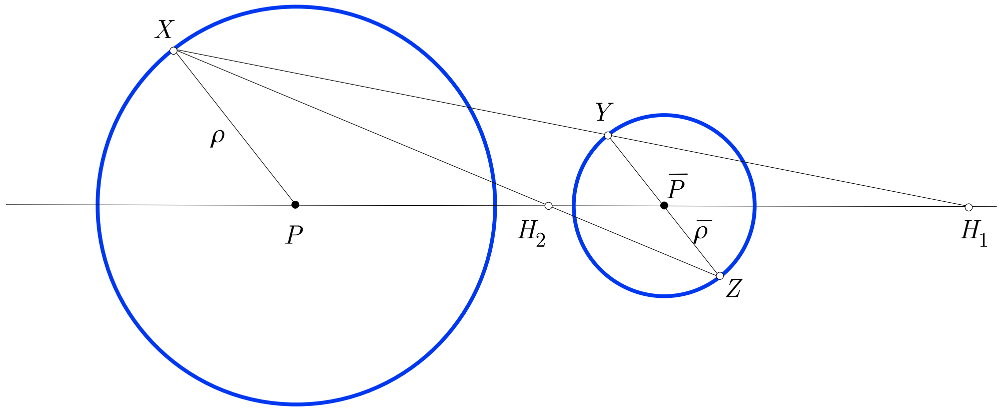
$$(x+y+z)(px+qy+rz) - a^2yz - b^2zx - c^2xy = -a^2yz - b^2zx - c^2xy.$$

Así, el eje radical de una circunferencia general y la circunferencia circunscrita tiene por ecuación $px + qy + rz = 0$.

2) Centros de semejanza de dos circunferencias.

Dos circunferencias $P(\rho)$ y $\overline{P}(\overline{\rho})$, de centros P y $\overline{P}$ y radios ρ y $\overline{\rho}$, tienen centros de semejanza interior y exterior en los puntos dados en coordenadas baricéntricas absolutas

$$\frac{\overline{\rho}}{\rho+\overline{\rho}}P + \frac{\rho}{\rho+\overline{\rho}}\overline{P}, \qquad \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}-\rho}P - \frac{\rho}{\overline{\rho}-\rho}\overline{P}.$$



Sea PX un radio en $P(\rho)$ y YZ el diámetro de $\overline{P}(\overline{\rho})$, paralelo a PX, teniendo el radio $\overline{P}Y$ el mismo sentido que PX. La recta XY corta a la recta $P\overline{P}$ (que pasa por los centros de las circunferencias) en el punto H_1, denominado centro exterior de semejanza de las circunferencias $P(\rho)$ y $\overline{P}(\overline{\rho})$.

De la semejanza de los triángulos $\widehat{H_1PX}$ y $\widehat{H_1\overline{P}Y}$, se tiene que $\frac{PH_1}{H_1\overline{P}} = -\frac{\rho}{\overline{\rho}}$; por lo que, en coordenadas baricéntricas absolutas:

$$H_1 = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}-\rho}P - \frac{\rho}{\overline{\rho}-\rho}\overline{P}. \tag{6}$$

De la semejanza de los triángulos $\widehat{H_2PX}$ y $\widehat{H_2\overline{P}Z}$, se sigue que $\dfrac{PH_2}{H_2\overline{P}} = \dfrac{\rho}{\overline{\rho}}$ y, entonces, el centro interior de semejanza viene dado por

$$H_2 = \frac{\overline{\rho}}{\rho+\overline{\rho}}P + \frac{\rho}{\rho+\overline{\rho}}\overline{P}. \tag{7}$$

3) Inversa de una circunferencia.

La inversión respecto a la circunferencia $P_0(k)$, de centro P_0 y radio k, transforma la circunferencia $P(\rho)$ en la circunferencia $\overline{P}(\overline{\rho})$, de radio

$$\overline{\rho} = \left|\frac{\rho k^2}{d^2-\rho^2}\right| \tag{8}$$

y centro en el punto $\overline{P}$ que divide al segmento P_0P en la razón

$$\frac{P_0\overline{P}}{\overline{P}P} = \frac{k^2}{d^2-k^2-\rho^2}, \tag{9}$$

donde d es la distancia entre P_0 y P. En concecuencia, $\overline{P}$ se expresa en coordenadas baricéntricas absolutas como

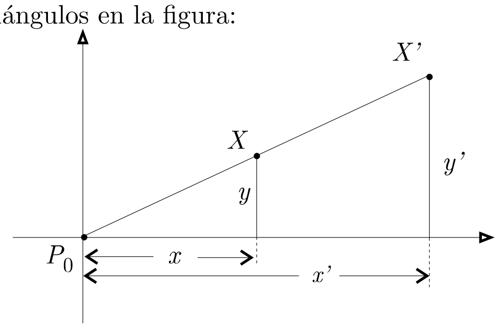
$$\overline{P} = \frac{d^2-k^2-\rho^2}{d^2-\rho^2}P_0 + \frac{k^2}{d^2-\rho^2}P. \tag{10}$$

Para establecer esto, podemos tomar (sin pérdida de generalidad) P_0 como origen de un sistema de coordenadas cartesiano rectangular (sólo momentáneamente en este apartado).

Las ecuaciones de la inversión de centro en el origen de estas coordenadas y razón k^2 (inversión respecto a la circunferencia $P_0(k)$ de centro en el origen y radio k) son

$$\overline{x} = \frac{k^2x}{x^2+y^2}, \qquad \overline{y} = \frac{k^2y}{x^2+y^2},$$

donde $X(x,y)$ y $\overline{X}(\overline{x},\overline{y})$ son puntos, inversos uno del otro, tal que $P_0X \cdot P_0\overline{X} = k^2$, como se deducen de la semejanza de triángulos en la figura:



$$\frac{x}{\overline{x}} = \frac{y}{\overline{y}} = \frac{P_0X}{P_0\overline{X}} = \frac{P_0X^2}{P_0X\cdot P_0\overline{X}} = \frac{x^2+y^2}{k^2}.$$

Una circunferencia $P(\rho)$, de centro $P(\alpha,\beta)$ y radio ρ, de ecuación $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+d^2-\rho^2=0$, con $d^2=\alpha^2+\beta^2$ (cuadrado de la distancia entre P_0 y P), que podemos poner de la forma

$$1-\frac{2\alpha x}{x^2+y^2}-\frac{2\beta y}{x^2+y^2}+\frac{d^2-\rho^2}{x^2+y^2}=0,$$

se transforma, mediante la inversión, en la circunferencia de ecuación

$$1-\frac{2\alpha x}{k^2}-\frac{2\beta y}{k^2}+\frac{d^2-\rho^2}{k^4}(x^2+y^2)=0.$$

La relación entre el radio de la circunferencia $P(\rho)$ y el de su circunferencia inversa $\overline{P}(\overline{\rho})$,

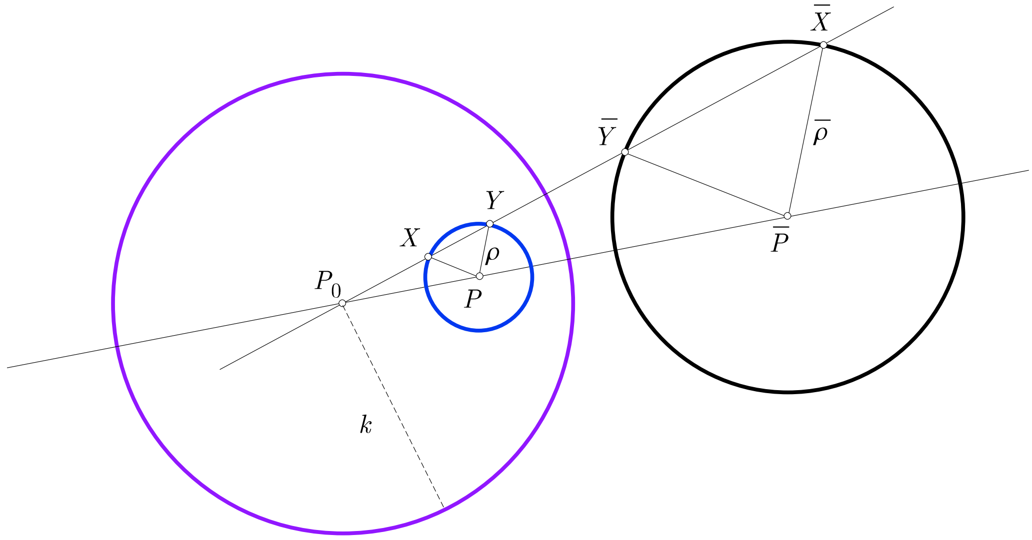
$$\overline{\rho}^2 = \frac{\alpha^2k^4}{(d^2-\rho^2)^2}+\frac{\beta^2k^4}{(d^2-\rho^2)^2}-\frac{k^4}{d^2-\rho^2},$$

es

$$\overline{\rho} = \left|\frac{\rho k^2}{d^2-\rho^2}\right|.$$

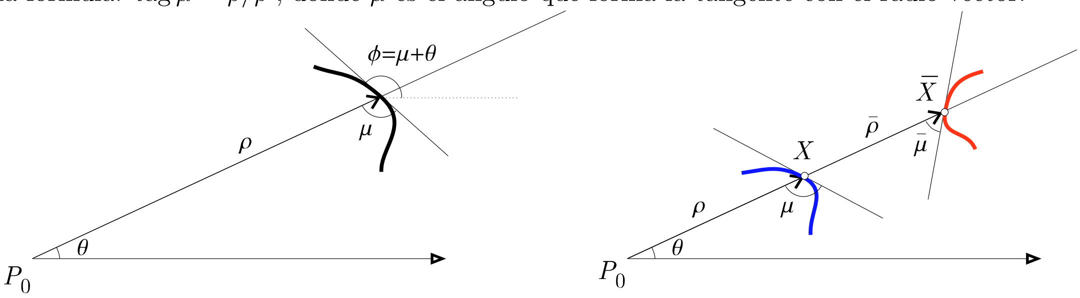
Para establecer (10), trazamos una recta por P_0 que corta a $P(\rho)$ en dos puntos X e Y, y sean $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ sus inversos. Entonces, como $PY \parallel \overline{P}\,\overline{X}$, los triángulos $\widehat{P_0PY}$ y $\widehat{P_0\overline{P}\,\overline{X}}$ son semejantes, con lo que

$$\frac{P_o\overline{P}}{\overline{P}P} = \frac{P_0\overline{X}}{\overline{X}Y} = \frac{P_0\overline{X}\cdot P_0X}{\overline{X}Y\cdot P_0X} = \frac{k^2}{(P_0Y - P_0\overline{X})P_0X} = \frac{k^2}{P_0Y\cdot P_0X - k^2} = \frac{k^2}{P_0P^2 - \rho^2 - k^2} = \frac{k^2}{d^2 - \rho^2 - k^2}.$$



La inversión conserva el ángulo entre curvas:

Establezcamos primero una fórmula relativa a la tangente a una curva dada en coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta)$. Se trata de la fórmula: $\operatorname{tag}\mu = \rho/\rho'$, donde μ es el ángulo que forma la tangente con el radio vector.



$$\operatorname{tag}\phi = \frac{y'}{x'} = \frac{\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{tag}\theta + \dfrac{\rho}{\rho'}}{1 - \dfrac{\rho}{\rho'}\operatorname{tag}\theta}$$

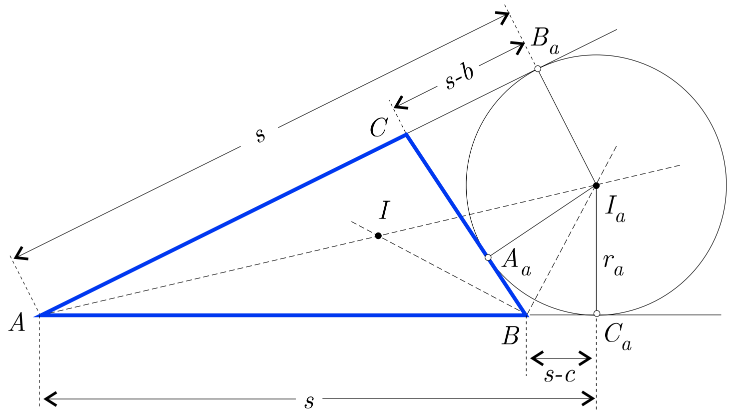
y usando la expresión trigonométrica siguiente, se obtiene la fórmula anunciada,

$$\operatorname{tag}(\theta+\mu) = \frac{\operatorname{tag}\theta + \operatorname{tag}\mu}{1 - \operatorname{tag}\mu\operatorname{tag}\theta}.$$

En una inversión un punto (θ, ρ) se transforma en el punto $(\theta, \overline{\rho})$, tal que $\rho\overline{\rho} = k^2$. Si la curva $\rho = \rho(\theta)$ se transforma en la curva $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\theta)$, resulta que $\rho'\overline{\rho} + \rho\overline{\rho}' = 0$, de donde $\rho/\rho' = -\overline{\rho}/\overline{\rho}'$, con lo que $\operatorname{tag}\mu = -\operatorname{tag}\overline{\mu} = \operatorname{tag}(\pi - \overline{\mu})$, o sea $\mu = \pi - \overline{\mu}$. Para otra curva será, análogamente, $\nu = \pi - \overline{\nu}$ y, restando de la relación anterior, resulta que $\mu - \nu = \overline{\nu} - \overline{\mu}$; luego el *ángulo que forman dos curvas y sus inversas son iguales y de sentido contrario.*

4) Circunferencia radical de las exinscritas.

Los puntos de contacto de la circunferencia exinscrita $I_a(r_a)$ al triángulo $\widehat{ABC}$, relativa al vértice A, es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos A_a, B_a y C_a, respectivamente. Entonces, se tienen las siguientes relaciones entre magnitudes de los segmentos:



$$AB_a = AC + CA_a, \qquad AC_a = AB + BA_a.$$

Sumando miembro a miembro, se tiene que $AB_a + AC_a = 2s$ y, como $AB_a = AC_a$, resulta que $AB_a = AC_a = s$, $BA_a = BC_a = s - c$ y $CA_a = CB_a = s - b$. Por lo que tenemos las siguientes razones:

$$\frac{BA_a}{A_aC} = \frac{s-c}{s-b}, \qquad \frac{CB_a}{B_aA} = -\frac{s-b}{s}, \qquad \frac{AC_a}{C_aB} = -\frac{s}{s-c}.$$

Por tanto, se tiene, en coordenadas baricéntricas homogéneas:

$$A_a(0 : s-b : s-c), \qquad B_a(s-b : 0 : -s), \quad C_a(s-c : -s : 0).$$

Para obtener la ecuación de la circunferencia $I_a(r_a)$ debemos resolver en las variables p, q y r, las ecuaciones siguientes, que resultan de sustituir estos puntos en la ecuación de una circunferencia general:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} & & (s-b)q & + & (s-c)r & = & a(s-b)(s-c) \\ (s-b)p & & & - & sr & = & bs(s-b) \\ (s-c)p & - & sq & & & = & cs(s-c) \end{array}\right\} \Rightarrow p = s^2,\ q = (s-c)^2,\ r = (s-b)^2.$$

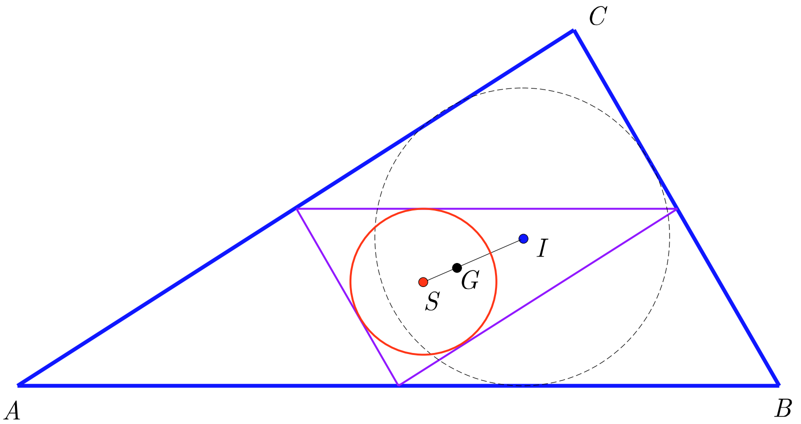
Se tiene, procediendo de forma similar para las otras circunferencias, que las ecuaciones de las circunferencias exinscritas son:

$$\begin{array}{l} I_a(r_a):\ a^3yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(s^2x + (s-c)^2y + (s-b)^2z) = 0. \\ I_b(r_b):\ a^3yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)((s-c)^2x + s^2y + (s-a)^2z) = 0. \\ I_c(r_c):\ a^3yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)((s-b)^2x + (s-a)^2y + s^2z) = 0. \end{array} \tag{11}$$

El centro radical de las circunferencias exinscritas (punto de igual potencia respecto a las tres) es el punto de Spieker:

El punto de Spieker [(2)] es el centro de la circunferencia del triángulo medial de $\widehat{ABC}$, que se obtiene de éste, mediante una homotecia de centro en el baricentro G y de razón $-1/2$, resulta que $IS : SG = 3 : -1$, es decir, $S = -\dfrac{1}{2}I + \dfrac{3}{2}G$. Con lo que las coordenadas baricéntricas homogéneas del punto de Spieker son

$$S(b+c : c+a : a+b).$$



[(2)] El punto de Spieker es el X_{10} de ETC (Kinberling's *Encyclopedia of Triangle Centers*).

Si un punto $(x:y:z)$ tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias exinscritas, debe satisfacer al sistema de ecuaciones:

$$s^2x+(s-c)^2y+(s-b)^2z=(s-c)^2x+s^2y+(s-a)^2z=(s-b)^2x+(s-a)^2y+s^2z=0.$$

Restando el segundo miembro de estas igualdades al primero y el tercero al segundo, resultan las ecuaciones:

$$(a+b)x-(a+b)y+(a-b)z=0, \qquad (b-c)x+(b+c)y-(b+c)z=0,$$

cuya solución son las coordenadas del punto de Spieker.

La potencia del punto de Spieker $S(b+c:c+a:a+b)$, respecto ala circunferencia exinscrita $I_a(r_a)$ es, por la fórmula (5),

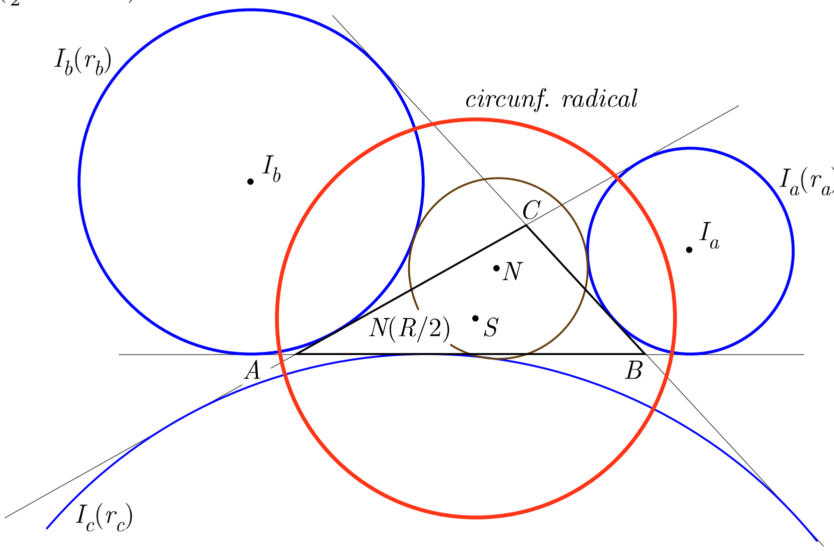
$$\frac{1}{4(a+b+c)^2}\Big((a{+}b{+}c)\big(s^2(b{+}c){+}(s{-}c)^2(c{+}a){+}(s{-}b)^2(a{+}b)\big)-\big(a^2(c{+}a)(a{+}b){+}b^2(a{+}b)(b{+}c){+}c^2(b{+}c)(c{+}a)\big)\Big)=$$

$$=\frac{abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{4(a+b+c)}.$$

Este es el mismo valor que toma

$$\frac{r^2+s^2}{4}.$$

La potencia de S respecto a las otras dos circunferencias exinscritas da este mismo resultado. Luego, la circunferencia $S(\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2})$, de centro en el punto de Spieker y radio $\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2}$, es ortogonal a las tres circunferencias exinscritas (circunferencia radical). Por tanto, estas tres circunferencias se transforman en sí mismas (quedan invariantes) en la inversión respecto a $S(\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2})$.



5) Puntos de tangencia de las circunferencias de los nueve puntos y las exinscritas

La ecuación de la circunferencia que pasa por los punto medios de los lados $M_a(0:1:1)$, $M_b(1:0:1)$, $M_c(1:1:0)$, se puede determinar resolviendo el sistema que se obtiene al sustituir en la ecuación de una circunferencia general estas coordenadas:

$$2(q+r)=a^2, \qquad 2(r+p)=b^2, \qquad 2(p+q)=c^2.$$

De donde se tiene que

$$p=\frac{-a^2+b^2+c^2}{4}=\frac{S_A}{2}, \quad q=\frac{a^2-b^2+c^2}{4}=\frac{S_B}{2}, \quad r=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=\frac{S_C}{2}.$$

Con lo que tal circunferencia tiene por ecuación:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{2}(x+y+z)(S_Ax+S_By+S_Cz)=0,$$

conocida como circunferencia de los nueve puntos o de Euler o de Feuerbach. Se ha utilizado la notación de Conway

$$S_A=S\operatorname{cotag}A=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}, \quad S_B=S\operatorname{cotag}B=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}, \quad S_C=S\operatorname{cotag}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

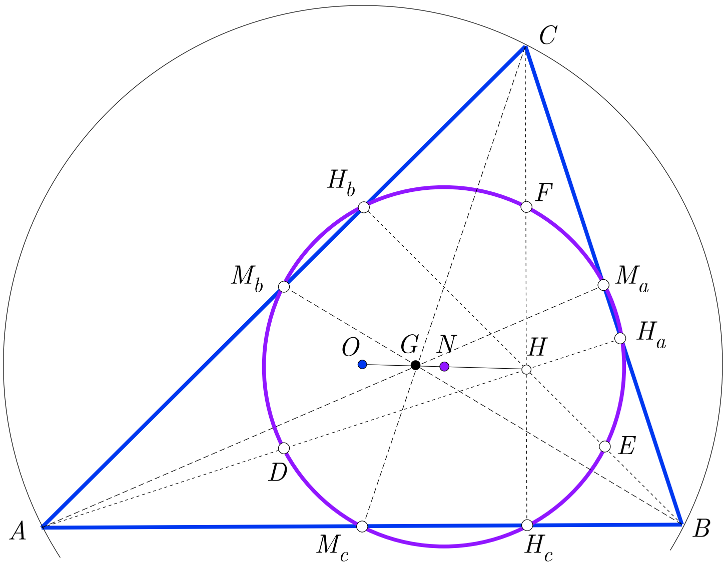
donde S es el doble del área de $\widehat{ABC}$.

Para obtener el centro y radio de la circunferencia de Euler, podemos proceder de la forma siguiente: Como ella pasa por los punto medios de los lados M_a, M_b y M_c y

$$\frac{AG}{GM_a} = \frac{BG}{GM_b} = \frac{CG}{GM_c} = \frac{2}{1},$$

se tiene que es la homotética de la circunferencia circunscrita, mediante la homotecia de centro en el baricentro G y razón $-1/2$. Así, su radio es $R/2$ y su centro N verifica $ON : NG = -3 : 1$, por lo que, usando las coordenadas de $G(1 : 1 : 1)$ y $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, que suman 3 y $2S^2$, se tiene que $N = 3O - 3(2S^2)G$. En coordenadas homogéneas $N(a^2S_A - 2S^2 : b^2S_B - 2S^2 : c^2S_C - 2S^2)$, o sea, que el centro de la circunferencia de los nueve puntos se puede poner usando $a^2 = S_B + S_C$, $b^2 = S_C + S_A$, $c^2 = S_A + S_B$ y $S^2 = S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A$, en la forma

$$N\big(S^2 + S_BS_C : S^2 + S_CS_A : S^2 + S_AS_B\big).$$



El eje radical de la circunferencia de los nueve puntos $N(R/4)$ y la exinscrita $I_a(r_a)$, se obtiene restando las ecuaciones de ambas, por lo que tiene de ecuación:

$$(2s^2 - S_A)x + (2c^2 - 4cs + 2s^2 - S_B)y + (2b^2 - 4bs + 2s^2 - S_C)z = 0,$$

o bien

$$(a+b)(a+c)x + (a+b)(b-c)y - (b-c)(a+c)z = 0, \qquad \text{ó} \qquad \frac{x}{b-c} + \frac{y}{a+c} - \frac{z}{a+b} = 0.$$

Para comprobar que el eje radical es tangente a ambas circunferencias (y, por consiguiente, su punto de tangencia es común a ambas) basta con comprobar que lo es a una de ellas. Para que sea tangente a $I_a(r_a)$, debe contener a su polo respecto a la ella; es decir, se debe anular la expresión que resulta de sustituir en la ecuación tangencial de $I_a(r_a)$ los coeficientes de la ecuación del eje radical (3):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} & \frac{1}{a+c} & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -s(s-b)^2(s-c) & -s(s-b)(s-c)^2 \\ -s(s-b)^2(s-c) & 0 & s^2(s-b)(s-c) \\ -s(s-b)(s-c)^2 & s^2(s-b)(s-c) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} \\ \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{a+b} \end{pmatrix} = 0.$$

Y el punto de tangencia es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -s(s-b)^2(s-c) & -s(s-b)(s-c)^2 \\ -s(s-b)^2(s-c) & 0 & s^2(s-b)(s-c) \\ -s(s-b)(s-c)^2 & s^2(s-b)(s-c) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b-c} \\ \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(b-c)^2 \\ -2(s-c)(a+c)^2 \\ -2(s-b)(a+b)^2 \end{pmatrix}.$$

(3) Las ecuaciones matriciales puntual y tangencial de una cónica se expresan por ${}^{t}XMX = 0$ y ${}^{t}UM^{\#}U = 0$, donde M y $M^{\#}$ son las matrices asociadas a las cónicas ($M^{\#}$ es la adjunta de M) y X y U son matrices columnas formadas por las coordenadas de punto y recta, respectivamente.

Análogamente, se obtienen los otros puntos de tangencia de las circunferencias de los nueve puntos con $I_b(r_b)$ y $I_c(r_c)$:

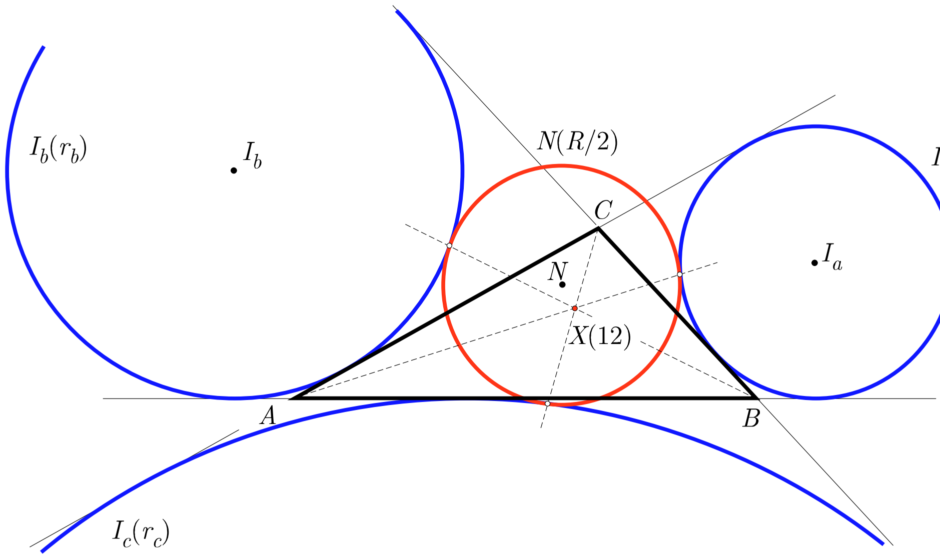
$$\big(2(s-c)(b+c)^2 : -s(c-a)^2 : 2(s-a)(b+a)^2\big), \quad \big(2(s-b)(c+b)^2 : 2(s-a)(c+a)^2 : -2s(a-b)^2\big).$$

Estos tres puntos de tangencia forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$ y su centro de perspectividad es el punto de coordenadas

$$\big((-a^2+(b-c)^2)(b+c)^2 : (-b^2+(c-a)^2)(c+a)^2 : (-c^2+(a-b)^2)(a+b)^2\big),$$

que el punto X_{12} en ETC, y que se puede, también, expresar como:

$$\left(\frac{(b+c)^2}{s-a} : \frac{(c+a)^2}{s-b} : \frac{(a+b)^2}{s-c}\right).$$



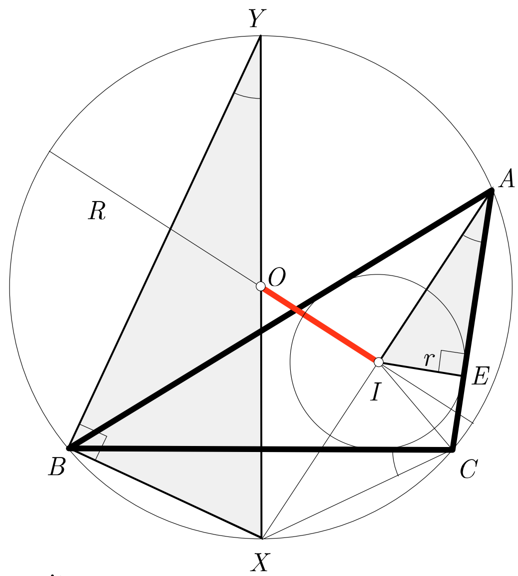
6) Distancia entre el incentro y circuncentro

En la figura, O es el circuncentro e I es el incentro del triángulo $\widehat{ABC}$. R y r son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita. El diámetro XY de la circunferencia circunscrita es la mediatriz del lado BC y E es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado AC.
Se tiene que:

$$\widehat{XCI} = \widehat{XIC} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{XCI} \text{ es isósceles.}$$

Con lo que

$$XI = XC = XB.$$



Por la potencia del punto I respecto a la circunferencia circunscrita,

$$XI \cdot IA = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2.$$

Como $\widehat{CAX} = \widehat{BYX}$ y $\widehat{YBX} = \widehat{AEI} = 90^{\rm o}$, los triángulos $\widehat{YBX}$ y $\widehat{AEI}$ son semejantes y entonces:

$$\frac{IA}{IE} = \frac{XY}{XB} \quad \Rightarrow \quad \frac{IA}{r} = \frac{2R}{XI} \quad \Rightarrow \quad r \cdot 2R = R^2 - OI^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{OI^2 = R(R-2r)}$$

Nota: Esta fórmula se conoce en la bibliografía como Teorema de Euler (1765) o Identidad de Chapple (1746).

Resolución del problema:

Considérese la inversión respecto a la circunferencia $S(\frac{1}{2}\sqrt{r^2+s^2})$ ortogonal a las circunferencias exinscritas, que daja invariantes a éstas tres. Como la circunferencia de los nueve puntos $N(R/2)$ es tangente a las tres exinscritas, su transformada, mediante esta inversión, es otra circunferencia que es tangente a las exinscritas (al conservar el ángulo entre curvas). Como la circunferencia es tangente a las exinscrira con contacto exterior, su inversa tiene contacto interior con ellas: se trata de la circunferencia de Apolonio del triángulo.

Para determinar su centro $O_0(R_0)$, usamos la fórmula (10), que da las coordenadas baricéntricas absolutas del centro de la circunferencia inversa de una dada:

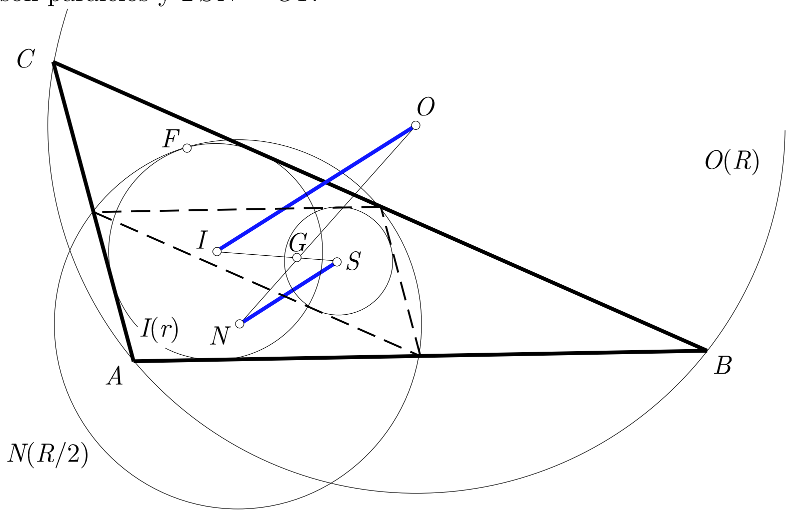
$$\overline{P} = \frac{d^2 - k^2 - \rho^2}{d^2 - \rho^2} P_0 + \frac{k^2}{d^2 - \rho^2} P.$$

En la que vamos a hacer las siguientes sustituciones:

▷ P_0 por el punto de Spieker S (centro de la circunferencia ortogonal a las exinscritas).

▷ P por N (centro de la circunferencia de los nueve puntos).

▷ $d^2 = SN^2 = \dfrac{1}{4}R(R-2r)$. Pues la distancia entre el incentro y circuncentro del triángulo $\widehat{ABC}$ viene dada por $OI^2 = R(R-2rR)$ y como S y N son las imagenes de I y O mediante la homotecia de centro G y razón $-1/2$, los segmentos IO y SN son paralelos y $2\,SN = OI$.



▷ $k^2 = \dfrac{1}{4}(r^2+s^2)$, razón de la inversión.

▷ $\rho = R/2$, radio de la circunferencia de los nueve puntos.

Y el resultado es

$$\boxed{O_0 = \frac{r^2+2rR+s^2}{2rR} S - \frac{r^2+s^2}{2rR} N}$$

El radio R_0 de la circunferencia de Apolonio, se obtiene de la fórmula (8):

$$\overline{\rho} = \left| \frac{\rho k^2}{d^2 - \rho^2} \right|,$$

haciendo las sustituciones:

$$\boxed{R_0 = \frac{r^2+s^2}{4r}}$$

Quedando entonces establecidas las relaciones (1) del principio de esta exposición.

El centro exterior de semejanza P de las circunferencias de Apolonio y circunscrita del triángulo $\widehat{ABC}$, se obtiene utilizando la fórmula (6):

$$H_1 = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho} - \rho} P - \frac{\rho}{\overline{\rho} - \rho} \overline{P}.$$

Al sustituir P por O, $\overline{P}$ por O_0, ρ por R y $\overline{\rho}$ por R_0, y usando que $O = 3G - 2N$, se tiene:

$$P = \frac{R_0}{R_0 - R} O - \frac{R}{R_0 - R} O_0$$

$$P = \frac{R_0}{R_0 - R}(3G - 2N) - \frac{R}{R_0 - R}\left(\frac{r^2+2rR+s^2}{2rR} S - \frac{r^2+s^2}{2rR} N \right)$$

$$P = \frac{6rR_0}{2r(R_0-R)}G - \frac{r^2+2rR+s^2}{2r(R_0-R)}S,$$

$$\boxed{P = \frac{3(r^2+s^2)}{r^2-4rR+s^2}G - \frac{2(r^2+2rR+s^2)}{r^2-4rR+s^2}S}$$

Con esto queda demostrada la fómula (2) y de paso que P e $I = 3G - 2S$ están en la recta GS; es decir I y P están alineados, que es una de las acertos que se pide establecer en el enunciado.

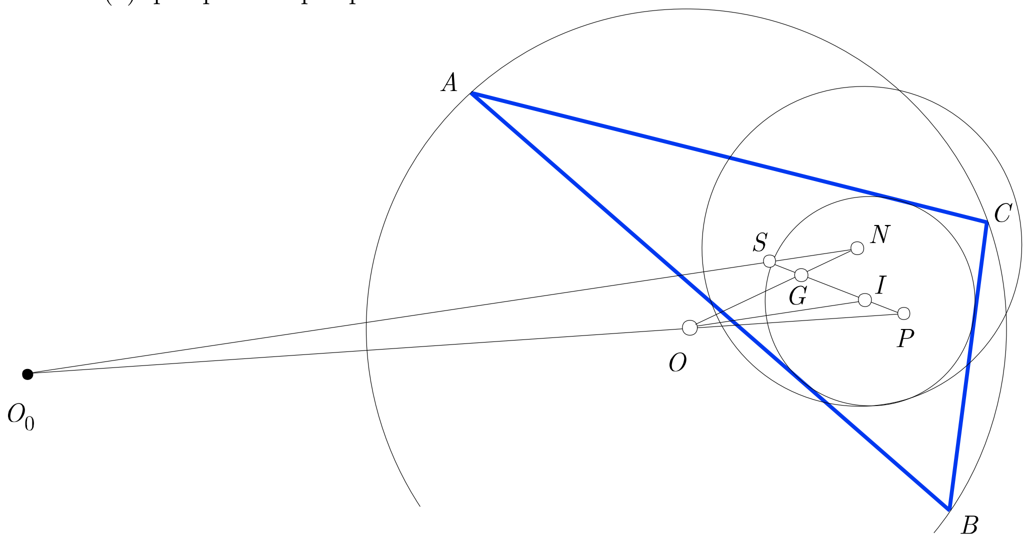
Sólo queda establecer que $PI/PS = R/R_0$. Para ello, basta observar que de las expresiones de I y P en función de G y S, se tiene

$$P = \frac{2rR_0}{2r(R_0-R)}I + \frac{4rR_0 - r^2 - 2rR - s^2}{2r(R_0-R)}S = \frac{R_0}{R_0-R}I - \frac{R}{R_0-R}S.$$

A esto también podemos llegar de la forma siguiente: Los triángulos $\widehat{GNS}$ y $\widehat{GOI}$ son homotéticos en la homotecia de centro G y razón -2; luego, SN y OI son paralelas y, en consecuencia, los triángulos $\widehat{PSO_0}$ y $\widehat{PIO}$ son semejantes. Se sigue que

$$\frac{PI}{PS} = \frac{PO}{PO_0} = \frac{R}{R_0}.$$

Esta relación es la (3) que quedaba por probar.



Notas adicionales:

• Para determinar las coordenadas baricéntricas homogéneas del centro O_0 de la circunferencia de Apolonio de un triángulo, usamos

$$\frac{SO_0}{O_0N} = \frac{k^2}{d^2-k^2-\rho^2},$$

donde,

$$k^2 = \frac{r^2+s^2}{4}, \qquad \rho = \frac{R}{2}, \qquad d^2 = \frac{R(R-2rR)}{4}.$$

Con lo que O_0 es:

$$\frac{(d^2-k^2-\rho^2)(4S^2)}{d^2-\rho^2}(b+c:c+a:a+b) + \frac{k^2(2s)}{d^2-\rho^2}(S^2+S_BS_C : S^2+S_CS_A : S^2+S_AS_B),$$

Sustituyendo todo, en función de las longitudes de los lados, se llega a:

$$O_0\Big(a^2(a^3(b+c)^2 + a^2(b+c)(b^2+c^2) + a(-b^4-2b^3c-2bc^3-c^4) + (b+c)(b^4+c^4)) : \cdots : \cdots\Big).$$

Se trata del punto X_{970} de ETC.

• Las coordenadas baricéntricas del centro exterior de semejanza P de las circunferencias circunscritas y de Apolonio de un triángulo, teniendo en cuenta que $IP/PS = -R/R_0$, son

$$R_0(2a+2b+2c)(a:b:c)-R(a+b+c)(b+c:c+a:a+b) \equiv (-bR-cR+2aR_0 : -aR-cR+2bR_0 : -aR-bR+2cR_0),$$

$$P\big(2(b+c)rR-a(r^2+s^2) : 2(a+c)rR-b(r^2+s^2) : 2(a+b)rR-c(r^2+s^2)\big),$$

sustituyendo los valores de s, R y r y simplificando,

$$s=\frac{a+b+c}{2}, \quad R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}, \quad r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$P\big(a^2(b^2+bc+c^2+a(b+c)) : b^2(c^2+ca+a^2+b(c+a)) : c^2(a^2+ab+b^2+c(a+b))\big).$$

Se trata del punto X_{386} de ETC.

• Como $O_0(R_0)$ es una circunferencia de Tucker su centro está en el eje de Brocard OK (K el simediano), luego su centro es $O_0 = OK \cap NS$:

$$OK: \ \frac{b^2-c^2}{a^2}x+\frac{c^2-a^2}{b^2}y+\frac{a^2-b^2}{c^2}z=0,$$

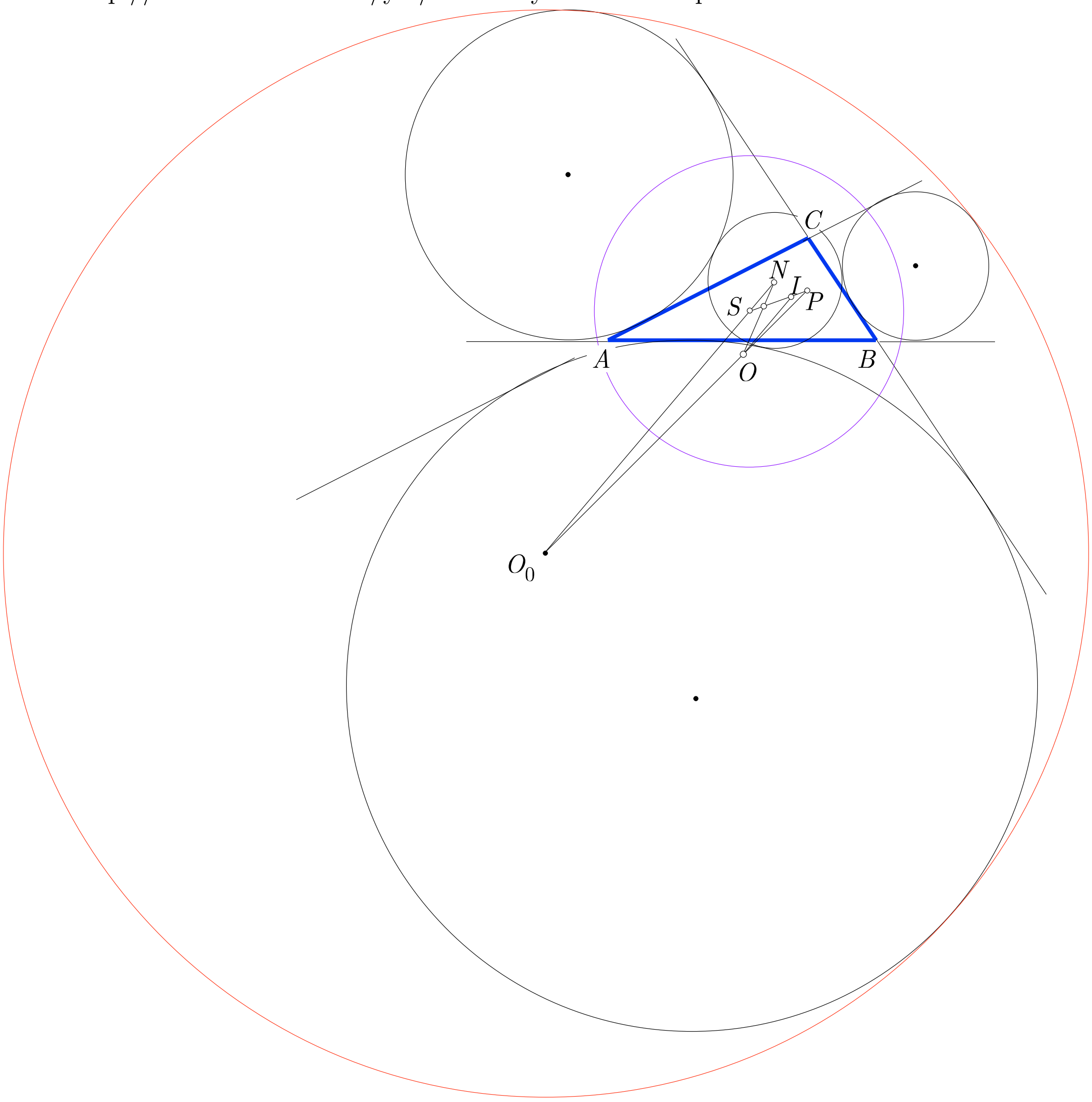
$$NS: \ (b-c)(a^3-a(b^2+c^2-bc)-bc(b+c))x+(c-a)(b^3-b(c^2+a^2-ca)-ca(c+a))y+(a-b)(c^3-c(a^2+b^2-ab)-ab(a+b))z=0.$$

• Referencias:

Darij Grinberg; Paul Yiu.- "The Apollonius Circle as a Tucker Circle." Forum Geom. 2(2002), 175-182.

Milorad R. Stevanović.- "The Apollonius Circle and Related Triangle Centers". Forum Geometricorum **3** (2003) 187–195).

Paul Yiu.- "Introduction to Geometry of the Triangle". Disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps



http://www.gt.matfun.ull.es/angel/pdf/ejtr2273.pdf