Problema 327 de *triánguloscabri*

Francisco Javier García Capitán

Julio de 2006

1. Enunciado

En la revista Laboratorio Virtual de Triángulos [1], dirigida por Ricardo Barroso Campos, aparece el siguiente problema, presentado por José Carlos Chávez Sandoval:

327. Dado un triángulo ABC, sea un punto P en su plano y sean $x = AP$, $y = BP$, $z = CP$. Demostrar que

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2-c^2)(x^2y^2+c^2z^2)+(a^2-b^2+c^2)(b^2y^2+x^2z^2) \\ &+(-a^2+b^2+c^2)(a^2x^2+y^2z^2)-(a^2x^4+b^2y^4+c^2z^4)-a^2b^2c^2=0, \quad (1) \\ &(y^2+z^2-a^2)^2x^2+(x^2+z^2-b^2)^2y^2+(x^2+y^2-c^2)^2z^2 \\ &-(y^2+z^2-a^2)(x^2+z^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)-4x^2y^2z^2=0. \quad (2) \end{aligned}$$

2. El trabajo de Euler

En el enunciado Ricardo Barroso cita a *Mathworld* [2] que a su vez cita a Euler [3]. Lo que vamos a hacer es seguir a Euler en la obtención de una fórmula que relaciona x, y, z, a, b, c. En el camino nos encontraremos una de las fórmulas propuestas, y la fórmula obtenida será muy parecida a la otra.

Euler comienza con un lema, que es lo que conocemos como teorema del coseno.

Lema 1. *En cualquier triángulo ABC,*

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}.$$

Lema 2. *Si $A = B \pm C$, entonces*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Demostración. Si $A = B \pm C$ entonces, por los teoremas de adición,

$$\cos A = \cos B \cos C \mp \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

de donde

$$\cos A - \cos B \cos C = \mp \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} &\cos^2 A + \cos^2 B \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C \\ =&\operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C \\ =&(1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) \\ =&1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C, \end{aligned}$$

de donde deducimos la igualdad propuesta. □

Corolario 1. *La misma relación se cumple si $A + B + C = 360°$.*

Demostración. Tenemos $360° - A = B + C$ y $\cos(360° - A) = \cos A$. □

Corolario 2. *Si $A + B + C = 180°$ entonces*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Demostración. Tenemos $180° - A = B + C$ y $\cos(180° - A) = \cos A$. □

Problema 1. *Dados un triángulo ABC y un punto D del mismo plano, relacionar las distancias $p = DA$, $q = DB$, $r = DC$ con los lados del triángulo ABC.*

Solución: Sean, como es habitual, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Como los ángulos BDC, CDA y ADB suman 360°, si llamamos $\alpha = \cos BDC$, $\beta = \cos CDA$, $\gamma = \cos ADB$ y aplicamos el Corolario 1, tenemos

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma \qquad (3)$$

Ahora, según el Lema 1 se cumple

$$\begin{aligned} \alpha = \cos BDC &= \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD \cdot BC} = \frac{q^2 + r^2 - a^2}{2qr} = \frac{U}{2qr}, \\ \beta = \cos CDA &= \frac{CD^2 + AD^2 - CA^2}{2CD \cdot AD} = \frac{r^2 + p^2 - b^2}{2rp} = \frac{V}{2rp}, \\ \gamma = \cos ADB &= \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{p^2 + q^2 - c^2}{2pq} = \frac{W}{2pq}, \end{aligned}$$

donde hemos llamado

$$U = q^2 + r^2 - a^2, V = r^2 + p^2 - b^2, W = p^2 + q^2 - c^2. \tag{4}$$

Sustituyendo estos valores de α, β, γ en (3), resulta

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{4q^2r^2} + \frac{V^2}{4r^2p^2} + \frac{W^2}{4p^2q^2} = 1 + \frac{UVW}{4p^2q^2r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow p^2U^2 + q^2V^2 + r^2W^2 = 4p^2q^2r^2 + UVW. \end{aligned}$$

Observación. Esta última igualdad es la fórmula (2) que debíamos obtener.

Ahora, teniendo en cuenta las relaciones (4),

$$\begin{aligned} &p^2(q^2 + r^2)^2 - 2a^2p^2(q^2 + r^2) + a^4p^2 \\ &+ q^2(r^2 + p^2)^2 - 2b^2q^2(r^2 + p^2) + b^4q^2 \\ &+ r^2(p^2 + q^2)^2 - 2c^2r^2(p^2 + q^2) + c^4r^2 \\ =&(q^2 + r^2)(r^2 + p^2)(p^2 + q^2) + 4p^2q^2r^2 \\ &- a^2(r^2 + p^2)(p^2 + q^2) - b^2(q^2 + r^2)(p^2 + q^2) - c^2(q^2 + r^2)(r^2 + p^2) \\ &+ a^2b^2(p^2 + q^2) + b^2c^2(q^2 + r^2) + c^2a^2(r^2 + p^2) \\ &- a^2b^2c^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Consideramos los términos del primer miembro de la igualdad en los que sólo aparecen las letras p, q, r. Tenemos

$$\begin{aligned} p^2(q^2 + r^2)^2 + q^2(r^2 + p^2)^2 =& p^2q^4 + p^2r^4 + 2p^2q^2r^2 + q^2p^4 + q^2r^4 + 2p^2q^2r^2 \\ =&(p^2 + q^2)(p^2q^2 + r^4) + 4p^2q^2r^2, \\ r^2(p^2 + q^2) =&(p^2 + q^2)(p^2r^2 + q^2r^2). \end{aligned}$$

Sumando obtenemos

$$\begin{aligned} &p^2(q^2 + r^2)^2 + q^2(r^2 + p^2)^2 + r^2(p^2 + q^2) \\ =&(p^2 + q^2)(p^2q^2 + r^4 + p^2r^2 + q^2r^2) + 4p^2q^2r^2 \\ =&(p^2 + q^2)(p^2 + r^2)(q^2 + r^2) + 4p^2q^2r^2, \end{aligned}$$

es decir, en (5) desaparecen los términos que sólo contienen las letras p, q, r. Entonces dicha expresión queda en la forma

$$\begin{aligned} &a^2(p^2 + q^2)(r^2 + p^2) + b^2(q^2 + r^2)(p^2 + q^2) + c^2(r^2 + p^2)(q^2 + r^2) \\ &-2a^2p^2(q^2 + r^2) - 2b^2q^2(r^2 + p^2) - 2c^2r^2(p^2 + q^2) \\ &-a^2b^2(p^2 + q^2) - a^2c^2(p^2 + r^2) - b^2c^2(q^2 + r^2) \\ &+a^4p^2 + b^4q^2 + c^4r^2 + a^2b^2c^2 = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

o también así:

$$
\begin{aligned}
&a^2p^2(a^2+p^2-b^2-c^2-q^2-r^2)\\
&+b^2q^2(b^2+q^2-c^2-a^2-r^2-p^2)\\
&+c^2r^2(c^2+r^2-a^2-b^2-p^2-q^2)+\\
&+a^2q^2r^2+b^2r^2p^2+c^2p^2q^2+a^2b^2c^2=0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

3. Terminando...

Al poner p, q, r en lugar de x, y, z en la fórmula (1) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(b^2+c^2-a^2)(q^2r^2+a^2p^2)\\
&+(c^2+a^2-b^2)(r^2p^2+b^2q^2)\\
&+(a^2+b^2-c^2)(p^2q^2+c^2r^2)\\
&-(a^2p^4+b^2q^4+c^2r^4)-a^2b^2c^2=0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

que se comprueba sin dificultad que es equivalente a (7).

Referencias

[1] `http://http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri`. Laboratorio Virtual de Triángulos, revista virtual dedicada a la resolución de triángulos y dirigida por Ricardo Barroso Campos.

[2] `http://mathworld.wolfram.com/TripolarCoordinates.html` Floor van Lamoen and y Eric W. Weisstein. "Tripolar Coordinates."MathWorld –A Wolfram Web Resource.

[3] Euler, L. "De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum."*Acta Acad. Sci. Petropolitanae*, 6 I, 3-18, 1786. Reprinted in *Opera Omnia, Series Prima*, Vol. 26, pp. 258-269. Puede encontrarse en `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E601.html`