Propuesto por Francisco Alcubilla, profesor de Estrategia territorial. Madrid.

Problema 350 .
Hallar un punto P interior a un triángulo ABC tal que $m.PA+n.PB+p.PC$ sea mínimo con los datos dados de m, n y p que están relacionados por $m+n+p=1$.

Alcubilla, F. (2006); Comunicación personal.

Solución de José María Pedret, Ingeniero Naval. Esplugues de Llobregat (Barcelona). (9 de diciembre de 2007)

CONSIDERACIONES PREVIAS

Para el problema del enunciado existen variadas soluciones: algebraicas, geométricas, mecánicas...(ver referencias); en este documento adoptamos las ideas de W. J. Van de Lindt que entendemos que conducen a una resolución bastante simple.

Suponemos ahora que tenemos tres escalares tales que $m' + n' + p' = k \quad (k > 0)$; siempre podemos escribir $m = \dfrac{m'}{k}, n = \dfrac{n'}{k}, p = \dfrac{p'}{k}$ por lo que la función $\mathscr{F}'(P)$

$$\mathscr{F}'(P) = m' \cdot PA + n' \cdot PB + p' \cdot PC = k \cdot m \cdot PA + k \cdot n \cdot PB + k \cdot p \cdot PC = k \cdot \mathscr{F}(P)$$

tiene los mismos extremos que $\mathscr{F}(P)$ y por lo tanto, la condición $m + n + p = 1$ no es necesaria.

Adoptaremos la siguiente notación

$$A = A_1, \quad B = A_2, \quad C = A_3, \quad \overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{d_1}, \quad \overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{d_2}, \quad \overrightarrow{PA_3} = \overrightarrow{d_3}, \quad m = n_1, \quad n = n_2, \quad p = n_3$$

La función que se pide minimizar es

$$\mathscr{F}(P) = m \cdot PA + n \cdot PB + p \cdot PC = \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot PA_i = \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot d_i \ .$$

Como la función $\mathscr{F}$ depende de d_i $(1 \leq i \leq 3)$, tomamos una referencia con una base de vectores unitarios dependientes de P , $\vec{u}_i = \dfrac{\vec{d}_i}{d_i}$ $(1 \leq i \leq 3)$, por lo que también podemos considerar los vectores $\overrightarrow{n_i} = n_i \overrightarrow{u_i}$ y el vector $\vec{\delta} = \dfrac{\delta}{\sqrt{3}} \left(\overrightarrow{u_1}\, \overrightarrow{u_2}\, \overrightarrow{u_3} \right)$.

DIBUJAMOS EL ENUNCIADO

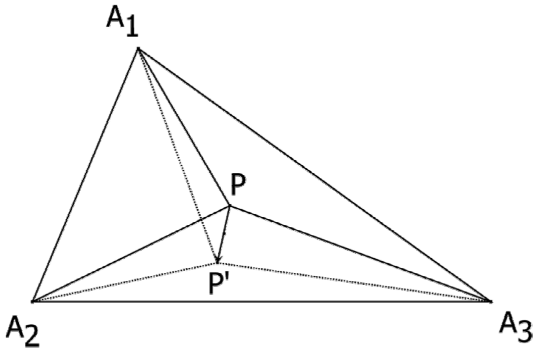

figura 1

Suponemos que tenemos el problema resuelto y que el punto P es la solución. Para otro punto P' tal que $\overrightarrow{PP'} = \vec{\delta}$ y si $\mathscr{F}$ tiene un mínimo en P su derivada direccional se anulará y por lo tanto se anulará también su gradiente.

$$\frac{d\mathscr{F}}{d\vec{\delta}} = 0 = \overrightarrow{\text{grad}}\mathscr{F} \cdot \vec{\delta} \quad \forall \vec{\delta}$$

pero

$$\text{grad}\,\mathscr{F} = \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial d_1} \, \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial d_2} \, \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial d_3} \right) = \left(n_1 \; n_2 \; n_3 \right) = n_1 \overrightarrow{u_1} + n_2 \overrightarrow{u_2} + n_3 \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2} + \overrightarrow{n_3} = 0$$

Es decir, los vectores $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$ deben formar un triángulo.

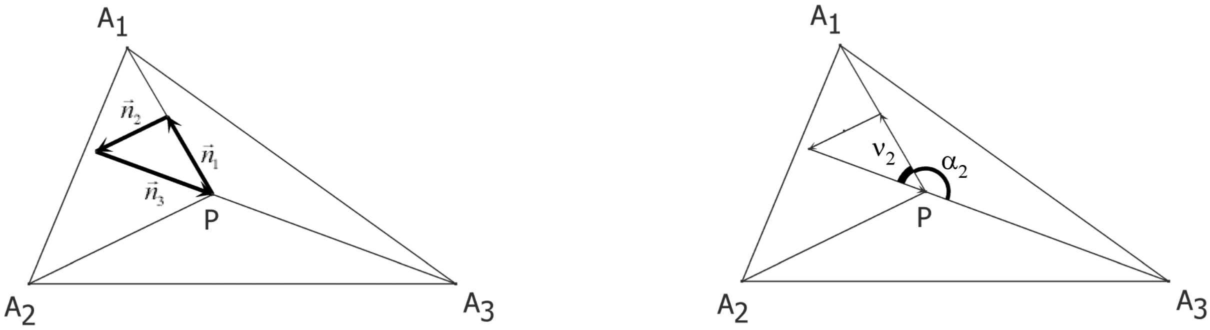

figura 2

Observando la figura vemos que $\alpha_2 + \nu_2 = \pi$, de ello deducimos que P debe estar en el arco opuesto al arco capaz de ángulo ν_2 inscrito en el segmento A_3A_1; análogamente P debe estar en el arco opuesto al arco capaz de ángulo ν_3 inscrito en el segmento A_1A_2 . De estas dos últimas condiciones se desprende que P debe estar en el arco opuesto al arco capaz de ángulo ν_1 inscrito en el segmento A_2A_3 .

SOLUCIÓN

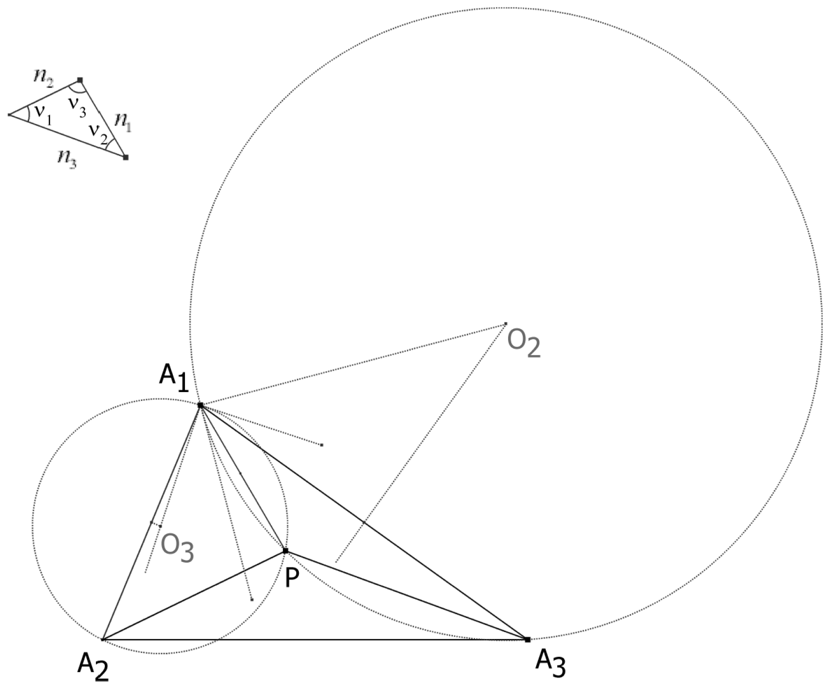

figura 3

- Con centro en A_1 rotamos la recta A_3A_1 el ángulo $\nu_2 = \angle(n_3, n_1)$ y por A_1 perpendicular a esta última recta que corta a la mediatriz de A_3A_1 en O_2.

- Con centro en O_2 circunferencia que pasa por A_3 (y A_1).

- Con centro en A_1 rotamos la recta A_1A_2 el ángulo $\nu_3 = \angle(n_1, n_2)$ y por A_1 perpendicular a esta última recta que corta a la mediatriz de A_1A_2 en O_3.

- Con centro en O_3 circunferencia que pasa por A_1 (y A_2).

- La intersección de las dos circunferencias da el punto P que minimiza la expresión del enunciado.

DISCUSIÓN

Para que exista el mínimo, el punto P debe ser interior al triángulo ABC.

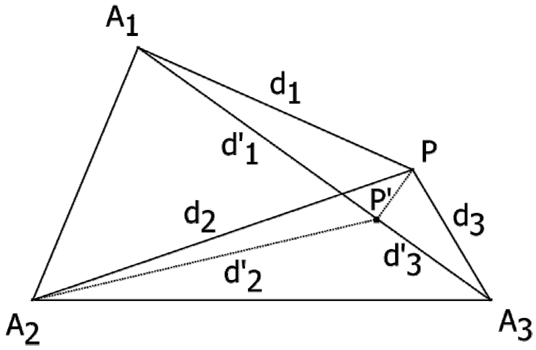

figura 4

Basta suponer que P es exterior. Trazamos desde P una perpendicular a un lado del triángulo y obtenemos P' sobre ese lado, basta observar la figura para ver que en estas condiciones

$$d_1' < d_1 \quad d_2' < d_2 \quad d_3' < d_3$$

y por lo tanto

$$\mathscr{F}(P) = \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot d_i > \sum_{i=1}^{3} n_i \cdot d_i' = \mathscr{F}(P')$$

El hecho de que el punto deba ser interior al triángulo se traduce como (ver figura 3)

$$\angle A_2PA_3 > \angle A_2A_1A_3 \quad \Rightarrow \quad \cos(\angle A_2PA_3) < \cos(A_2A_1A_3)$$

y como

$$\begin{aligned} n_1^2 &= n_2^2 + n_3^2 + 2n_2n_3\cos(n_2\ ,n_3) = n_2^2 + n_3^2 + 2n_2n_3\cos(\pi - \angle A_2PA_3) = \\ &= n_2^2 + n_3^2 - 2n_2n_3\cos(\angle A_2PA_3) \end{aligned}$$

y escribiendo $a_1 = A_2A_3$, $a_2 = A_3A_1$, $a_3 = A_1A_2$ podemos poner la desigualdad de cosenos para cada ángulo como

$$-\frac{n_1^2 - n_2^2 - n_3^2}{2n_2n_3} < \frac{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}, \quad -\frac{n_2^2 - n_3^2 - n_1^2}{2n_3n_1} < \frac{a_2^2 - a_3^2 - a_1^2}{2a_3a_1}, \quad -\frac{n_3^2 - n_1^2 - n_2^2}{2n_1n_2} < \frac{a_3^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

Por otra parte si los n_i no son los lados de un triángulo, podemos suponer que $n_1 \geq n_2 + n_3$ y en estas condiciones

$$\begin{aligned} n_1 \cdot d_1 + n_2 \cdot d_2 + n_3 \cdot d_3 &\geq (n_2 + n_3) \cdot d_1 + n_2 \cdot d_2 + n_3 \cdot d_3 = \\ &= n_2(d_1 + d_2) + n_3(d_3 + d_1) = \\ &= n_2(PA_1 + PA_2) + n_3(PA_3 + PA_1) \geq \\ &\geq n_2(A_1A_2) + n_3(A_3A_1) \end{aligned}$$

lo que nos indica que el mínimo está en A_1. Análogamente obtendríamos los otros vértices. Para discernir el vértice en el caso de $n_1 = n_2 > n_3$ el mínimo estaría en el vértice que tenga un mayor ángulo.

RESULTADOS

Si $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, estamos en el caso del problema de Fermat, el triángulo de los n_i es equilátero y los ángulos $\angle A_i P A_j = 120°$.

Quien quiera trabajar un poco más puede comprobar que

- Si los n_i coinciden con los a_i y los ángulos del triángulo dado son agudos, $\mathscr{F}(P) = 4S$, donde S es el área del triángulo dado. El punto P es el ortocentro del triángulo dado.

- Si $n_1 = I_2 I_3, n_2 = I_3 I_1, n_3 = I_1 I_2$, donde los I_i son los ex-incentros del triángulo dado, entonces $\mathscr{F}(P) = 4Rs$, donde s y R son respectivamente el semiperímetro y el radio del círculo circunscrito al triángulo dado. El punto P es el incentro del triángulo dado.

- Si $n_i = \operatorname{sen}(2\beta_i)$, donde los β_i son los ángulos del triángulo dado. El punto P es el circuncentro del triángulo dado y entonces $\mathscr{F}(P) = 4R \operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\beta_2 \operatorname{sen}\beta_3$.

- Si $\dfrac{n_1}{m_1} = \dfrac{n_2}{m_2} = \dfrac{n_3}{m_3}$, donde los m_i son las medianas del triángulo dado entonces el punto P es el baricentro. Si $\dfrac{n_i}{m_i} = 1$, entonces $\mathscr{F}(P) = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.

REFERENCIAS

1. I. Greenberg and R.A. Robertello. The three factory problem, MATHEMATICS MAGAZINE 38 (1965). 67-72

2. W. J. Van de Lindt. Ageometrical solution of the three factory problem., MATHEMATICS MAGAZINE 39 (1966).162-165

3. Jingcheng Tong and Yap S. ChuaThe generalized Fermat's point, MATHEMATICS MAGAZINE 68 (1995).214-215

4. Shay Gueron and Ran Tessler, The Fermat-Steiner problem, THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY 109, No. 5 (May, 2002), pp. 443-451.