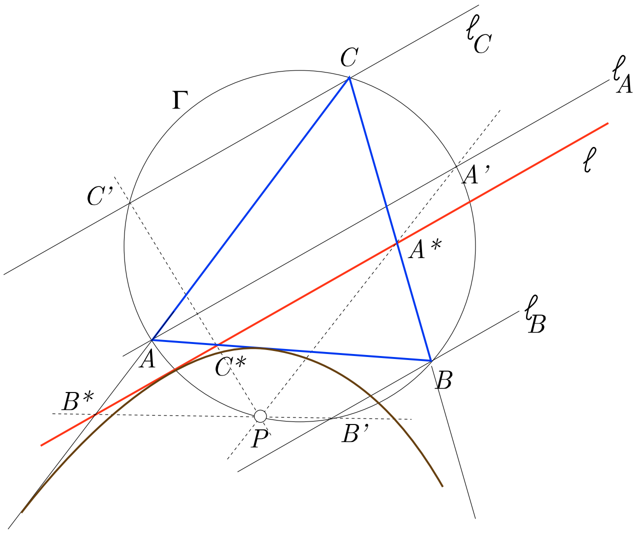
Por los vértices, A, B, C de un triángulo $\widehat{ABC}$, se trazan tres rectas de igual dirección que reencuentran a la circunferencia circunscrita Γ en A', B' y C'. Sea P un punto de Γ; las rectas PA', PB' y PC' vuelven a encontrar a las rectas BC, CA y AB en A^*, B^* y C^*. Demostrar que estos puntos pertenecen a una misma recta ℓ. ¿Cuál es la dirección de esta recta?

SOLUCIÓN:



Problema 358. Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II

Procedemos a hacer una demostración análitica, ayudándonos de MATHEMATICA.

La ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$, en coordenadas baricéntricas referidas a dicho triángulo, es:

$$\Gamma \equiv a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

Sea una recta arbitraria por $A(1:0:0)$,

$$\ell_A \equiv qy + rz = 0.$$

La intersección de Γ y ℓ_A, a parte del punto A, es:

$$A'\left(a^2qr : r(-b^2q + c^2r) : q(b^2q - c^2r)\right).$$

Si $P(u:v:w)$ es un punto de Γ $(c^2uv + b^2uw + a^2vw = 0)$, la recta PA' corta al lado BC en

$$A^*\left(0 : r(-b^2qu + c^2ru - a^2qv) : q(b^2qu - c^2ru - a^2rw)\right)$$

La recta por B, paralela a ℓ_A (es decir, con el mismo punto del infinito $(q-r:r:-q)$), es

$$\ell_B \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ q-r & r & -q \end{vmatrix} = qx + (q-r)z = 0.$$

La intersección de Γ y ℓ_B, a parte del punto B, es:

$$B'\left(-((q-r)(a^2q + c^2(-q+r))) : b^2q(q-r) : q(a^2q + c^2(-q+r))\right)$$

La recta PB' corta al lado CA en

$$B^*\left(-(q-r)(b^2qu + (a^2q + c^2(-q+r))v) : 0 : q(a^2qv - c^2qv + c^2rv - b^2qw + b^2rw)\right).$$

La recta A^*B^* tiene el mismo punto del infinito que ℓ_A; es decir, son paralelas. En efecto:

$$\begin{vmatrix} 0 & r(-b^2qu + c^2ru - a^2qv) & q(b^2qu - c^2ru - a^2rw) \\ \begin{matrix} -(q-r)b^2qu \\ -(q-r)(a^2q + c^2(-q+r))v \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} q(a^2q - c^2q + c^2r)v \\ -q(b^2q - b^2r)w \end{matrix} \\ q-r & r & -q \end{vmatrix} =$$

$$= q(q-r)r(b^2q(q-r)+r(a^2q+c^2(-q+r)))(c^2uv+b^2uw+a^2vw)=0.$$

La recta por C, paralela a ℓ_A, es
$$\ell_C \equiv rx+(r-q)y=0.$$

La intersección de Γ y ℓ_C, a parte del punto C, es:
$$C'\left(-((q-r)(b^2(q-r)+a^2r)) : r(-(a^2r)+b^2(-q+r)) : c^2(q-r)r\right)$$

La recta PC' corta al lado AB en
$$C^*\left((q-r)(c^2ru+(b^2(q-r)+a^2r)w) : r(c^2qv-c^2rv+b^2qw+a^2rw-b^2rw) : 0\right)$$

La recta B^*C^* tiene el mismo punto del infinito que ℓ_A; es decir, son paralelas. En efecto:
$$\begin{vmatrix} -(q-r)(b^2qu+(a^2q+c^2(-q+r))v) & 0 & \begin{array}{c} q(a^2q-c^2q+c^2r)v+ \\ q(-b^2q+b^2r)w \end{array} \\ (q-r)(c^2ru+(b^2(q-r)+a^2r)w) & \begin{array}{c} r(c^2q-c^2r)v+ \\ r(b^2q+a^2r-b^2r)w \end{array} & 0 \\ q-r & r & -q \end{vmatrix} =$$
$$= q(q-r)r(b^2q(q-r)+r(a^2q+c^2(-q+r)))(c^2uv+b^2uw+a^2vw)=0.$$

Se concluye que los puntos A^*, B^* y C^* están en una misma recta ℓ, parlela a ℓ_A.

Tiene que verificarse que la recta A^*C^* tiene el mismo punto del infinito que ℓ; es decir, son paralelas. En efecto:
$$\begin{vmatrix} 0 & r(-b^2qu+c^2ru-a^2qv) & q(b^2qu-c^2ru-a^2rw) \\ (q-r)(c^2ru+(b^2(q-r)+a^2r)w) & r(c^2qv-c^2rv+b^2qw+a^2rw-b^2rw) & 0 \\ q-r & r & -q \end{vmatrix} =$$
$$= q(q-r)r(b^2q(q-r)+r(a^2q+c^2(-q+r)))(c^2uv+b^2uw+a^2vw)=0.$$

Podemos comprobar directamente que A^*, B^* y C^* están alineados, calculando el determinante formado por sus coordenadas, cuyo valor es
$$-qr(q-r)(b^2q(q-r)+r(a^2q+c^2(-q+r)))(-c^2(r(u-v)+qv)+a^2(qv-rw)+b^2(q(u-w)+rw))\cdot$$
$$\cdot(a^2vw+b^2wu+c^2uv)=0.$$

Notas:

• Otra solución, José María Pedret:
`www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol358ped.htm`

• Cuando se considera P fijo en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$ y se hace variar la recta ℓ_A, por el vértice A, la envolvente de la recta ℓ es una parábola inscrita en $\widehat{ABC}$ con foco en P y directriz pasando por el ortocentro de $\widehat{ABC}$.

Esta parábola se determina fácilmente, pues la tangente en el vértice es la recta (línea de Wallace-Simson) que contiene los pies de las perpendiculares desde P a los lados de $\widehat{ABC}$.

Para más información consultar:
Problems related to parabolas:
`http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/problems/Problems.htm#tri`
Triangles and Parabolas:
http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student.Folders/Giddings.Jemma/Parabo las/Parabolas.html

`http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student.Folders/Giddings.Jemma/`
`Parabolas/Parabolas.html`

A Tour of Triangle Geometry via the Geometer's Sketchpad (Inscribed parabolas):

`http://www.math.fau.edu/yiu/TourOfTriangleGeometry/`
`Tour_of_Triangle_Geometry.html`