Problema 373 de triánguloscabri. *Demostrar que el perímetro de un triángulo acutángulo y el de su triángulo órtico son proporcionales a los radios de los círculos circunscrito e inscrito en el primero.*

Matemática Elemental (1933) Tomo II, N.2, Febrero, págs. 26-29.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sea DEF el triángulo órtico del triángulo ABC. Por ser el triángulo ABC acutángulo es $AE = c\cos A$ y $AF = b\cos A$, los triángulos ABC y AEF son semejantes y $EF = a\cos A$.

De la misma forma es $DE = c\cos C$ y $FD = b\cos B$.

Entonces el perímetro de DEF es

$$\begin{aligned} p' =& a\cos A + b\cos B + c\cos C = \\ =& a \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + c \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ac} = \\ =& \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc} = \\ =& \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc} = \\ =& \frac{4p(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta las fórmulas del área

$$S = sr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

obtenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{S}{s}}{\frac{abc}{4S}} = \frac{4S^2}{sabc} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc} = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.$$

Queda entonces claro que $p'/p = r/R$, como había que demostrar.