Problema 375 de triánguloscabri. *En el triángulo ABC se tiene D en AC tal que $AC = BD$ y también $\angle ABD = 10^\circ$, $\angle CBD = 40^\circ$. Hallar $\angle A$.*

Propuesto por Juan Carlos Salazar.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Llamamos $AD = x$, $DC = y$. Teniendo en cuenta que $C = 180^\circ - 50^\circ - A = 130^\circ - A$ y que $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(130^\circ - A) = \operatorname{sen}(50^\circ + A)$, aplicando el teorema de los senos obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{x}{\operatorname{sen} 10^\circ}, \\ \dfrac{x+y}{\operatorname{sen}(50^\circ + A)} = \dfrac{y}{\operatorname{sen} 40^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (x+y)\dfrac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} A}, \\ y = (x+y)\dfrac{\operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen}(50^\circ + A)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+y) = (x+y)\left(\frac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} A} + \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen}(50^\circ + A)}\right).$$

Como suponemos $x + y \neq 0$, debe ser

$$\frac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} A} + \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen}(50^\circ + A)} = 1$$

Para resolver esta ecuación recurrimos a *Mathematica*, obteniendo las soluciones en grados,

```
Sin50 = N[Sin[50*Degree], 10];
Cos50 = N[Cos[50*Degree], 10];
Sin10 = N[Sin[10*Degree], 10];
Sin40 = N[Sin[40*Degree], 10];
ArcTan[SinA/CosA]/Degree /.
  Solve[{
    Sin10/SinA + Sin40/(Sin50*CosA + SinA*Cos50) == 1,
    SinA^2 + CosA^2 == 1}, {SinA, CosA}]

{-5.20974105, 78.63444358, 30.00000001, -23.42470253}
```

siendo válidas las dos soluciones positivas de las cuatro obtenidas.

Podemos comprobar que $A = 30^\circ$ es una solución, de esta forma:

$$\begin{aligned} A = 30^\circ \text{ es solución } &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} + \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{sen} 10^\circ + \frac{1}{2\cos 40} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\cos 40^\circ - 4\cos 40^\circ \operatorname{sen} 10^\circ = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\cos 40^\circ - 4\cos 40^\circ \cos 80^\circ = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\cos 40^\circ - 4\left(\tfrac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\cos 40^\circ - 2\cos 120^\circ - 2\cos 40^\circ = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos 120^\circ = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$