Problema 376 de triánguloscabri. *Se prolongan los lados AB, BC, CA, de un triángulo en $t = BB' = CC' = AA'$, y los lados BA, CB, AC, en $t = AA'' = BB'' = CC''$. Demostrar que las rectas $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, forman un nuevo triángulo cuya área es*

$$S_1 = \frac{2SR}{r} + 2td + \frac{t^2d^2}{2pR}.$$

con S área, R circunradio, r inradio, d=4R+r, p semiperímetro. (L. de Alba).

- *Neuberg (1900). El Progreso Matemático (II) p. 231, cuestión 233.*
- *Revista Trimestral de Matemáticas, Año I, Diciembre, de 1901, Número 4 (Propuesto con el número 20). Zaragoza.*
- *(1902) Revista Trimestral de Matemáticas, Año, II, Zaragoza, Junio de 1902, N.6. Zaragoza.*

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Hagamos uso de las coordenadas baricéntricas. En particular usaremos que la fórmula para calcular el área de un triángulo XYZ cuyos vértices tienen coordenadas $X = (u_1 : v_1 : w_1)$, $Y = (u_2 : v_2 : w_2)$ y $Z = (u_3 : v_3 : w_3)$, entonces,

$$(XYZ) = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}}{(u_1+v_1+w_1)(u_2+v_2+w_2)(u_3+v_3+w_3)}(ABC).$$

Para éste y otros cálculos podemos usar las funciones definidas en el cuaderno de *Mathematica* que puede encontrarse en en

`http://garciacapitan.auna.com/baricentricas`

También usaremos las conocidas fórmulas del área del triángulo

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R},$$

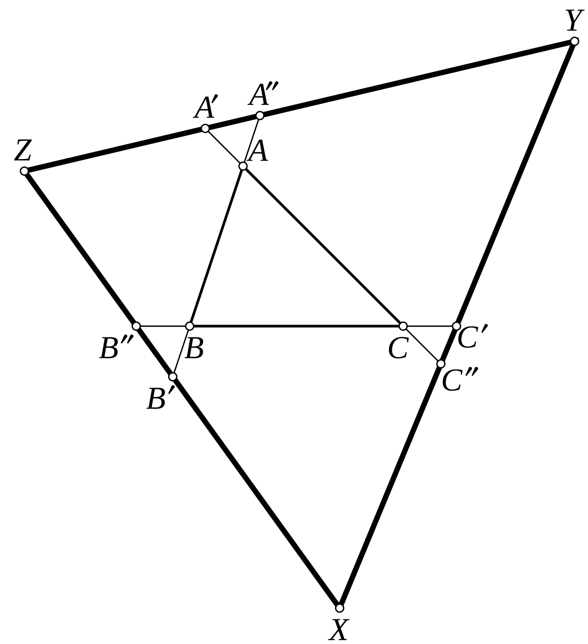
y también usaremos la menos conocida fórmula

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr,$$

que puede demostrarse usando las relaciones

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}, \quad Rr = \frac{abc}{4p}.$$

Pasamos ya a resolver el problema:



Por ser $CA' : A'A = b+t : -t$ es $A' = (b+t : 0 : -t)$. Asimismo tenemos $B' = (-t : c+t : 0)$ y $C' = 0 : -t : a+t)$. Y de la misma forma tenemos también $A'' = (c+t : -t : 0)$, $B'' = (0 : a+t : -t)$ y $C'' = (-t : 0 : b+t)$.

La recta $B'B''$ viene dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -t & c+t & 0 \\ 0 & a+t & -t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -t(c+t)x - t^2y - t(a+t)z = 0$$

$$\Leftrightarrow (c+t)x + ty + (a+t)z = 0.$$

De la misma forma, la recta $C'C''$ tiene ecuación $(b+t)x+(a+t)y+tz = 0$, y el punto de intersección de $B'B''$ y $C'C''$ es el punto

$$X = (-a(a+2t) : (b-c)t + a(b+t) : (-b+c)t + a(c+t)) \,.$$

Y de la misma forma también hallamos las fórmulas de los otros puntos de intersección $Y = C'C'' \cap A'A''$, $Z = A'A'' \cap B'B''$:

$$Y = ((b-c)t + a(b+t) : -b(b+2t) : (-a+c)t + b(c+t)) \,,$$
$$Z = ((-b+c)t + a(c+t) : (-a+c)t + b(c+t) : -c(c+2t)) \,.$$

Con estas coordenadas podemos hallar el área del triángulo XYZ, que resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{S} =&\frac{\left((a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc)t-2abc\right)^2}{8abc\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} = \\
=&\frac{\left(\left((a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)\right)t-2abc\right)^2}{8abc\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} = \\
=&\frac{\left(\left(4p^2-4(p^2+r^2+4Rr)\right)t-8RS\right)^2}{32RS\cdot(S^2/p)} = \\
=&\frac{p\left(\left(4(r^2+4Rr)\right)t+8RS\right)^2}{32RS^3} = \\
=&\frac{p\left(rdt+2RS\right)^2}{2RS^3} \Rightarrow S_1 = \frac{p(rdt+2RS)^2}{2RS^2}.
\end{aligned}$$

Ahora comprobamos que S_1 coincide con la fórmula del enunciado:

$$\begin{aligned}
S_1 =&\frac{4pR^2S^2}{2RS^2}+\frac{4\overbrace{pr}^{S}dRSt}{2RS^2}+\frac{(pr^2)d^2t^2}{2RS^2} = \\
=&2pR+2td+\frac{(Sr)d^2t^2}{2RS(pr)} = \\
=&\frac{2SR}{r}+2td+\frac{d^2t^2}{2pR}.
\end{aligned}$$