# Problema 378 de *triánguloscabri*

Francisco Javier García Capitán

## 1. Enunciado del problema

**Problema 378 de triánguloscabri.** *Caracterizar por sus ángulos a todo triángulo $ABC$, que verifica la relación $2r(b+c) = 2r^2+bc$, donde $a$ es mayor que $b$ y $c$ y $r$ es el radio de su círculo inscrito.*

*Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

## 2. Análisis con *Mathematica*

Teniendo en cuenta que

$$r^2 = \frac{S^2}{s^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s},$$

para evitar la aparición de raíces escribimos la igualdad propuesta en la forma

$$r = \frac{2r^2+bc}{2(b+c)} \Rightarrow r^2 = \left(\frac{2r^2+bc}{2(b+c)}\right)^2.$$

Usamos *Mathematica* para factorizar la expresión resultante de sustituir el valor de $r^2$, obteniendo:

$$s = \frac{a+b+c}{2};$$

$$\text{solucion} = \text{Numerator}\left[\text{Factor}\left[\left(\frac{2\,r2 + b\,c}{2\,(b+c)}\right)^2 - r2 \;/.\; r2 \to \frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}\right]\right]$$

$$(a^2 - b^2 - c^2)\,(a^4 - 2a^3 b + 4a^2 b^2 + 2 a b^3 - 5 b^4 - 2 a^3 c + 10 a^2 b c - 6 a b^2 c - 2 b^3 c + 4 a^2 c^2 - 6 a b c^2 + 6 b^2 c^2 + 2 a c^3 - 2 b c^3 - 5 c^4)$$

# 3. Ver familias de triángulos

## 3.1. Un ejemplo

Sabemos que las condiciones $a^2 < b^2 + c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$ y $a^2 > b^2 + c^2$ sobre los lados de un triángulo $ABC$ corresponden respectivamente a que el ángulo $A$ es agudo, recto u obtuso.

Por otro lado, si fijamos los vértices $B$ y $C$ del triángulo $ABC$, y suponemos que se cumple la igualdad $a^2 = b^2+c^2$, entonces teniendo en cuenta el concepto de arco capaz, $A$ varía en una circunferencia de diámetro $BC$. También podemos llegar a este resultado de forma analítica. Para ello, suponemos que $B$ y $C$ tienen coordenadas cartesianas $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente. Entonces tendremos las relaciones

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ b &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \\ c &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

de donde la relación $b^2 + c^2 = a^2$ equivale a $x^2 + y^2 = 1$, es decir, la circunferencia con diámetro $BC$.

Por tanto, fijados los dos vértices $B$ y $C$, el plano queda dividido en tres partes, la circunferencia con diámetro $BC$, su interior y su exterior, y según el punto $A$ esté en una de ellas, el triángulo $ABC$ será rectángulo, obtusángulo o acutángulo, respectivamente.

## 3.2. Caso general

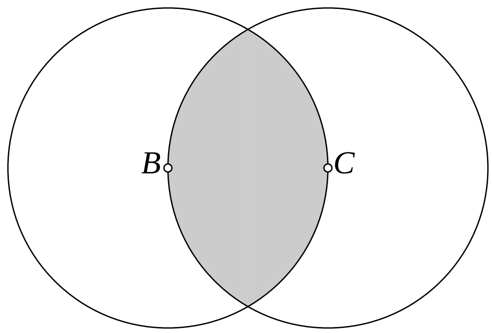
Dada una función continua $f(a, b, c)$ de los lados de un triángulo $ABC$, si fijamos los puntos $B$ y $C$ respectivamente con coordenadas $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y $A = (x, y)$ es variable, pero sometido a las relaciones (1) y a la igualdad $f(a, b, c) = 0$, resultará que las coordenadas $(x, y)$ cumplirán una determinada curva $\phi(x, y) = 0$.

La gráfica de la curva delimitará las regiones del plano correspondientes a las desigualdades $f(a, b, c) > 0$ y $f(a, b, c) < 0$.

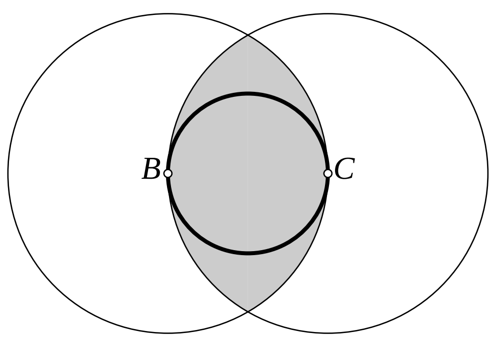
# 4. Solución del problema propuesto

Una de las condiciones del enunciado es que $A$ sea el mayor de los lados del triángulo, que podemos expresar con las relaciones $a \geqslant b$, $a \geqslant c$ si admitimos la posibilidad de el ángulo $A$ sea igual a alguno de los ángulos $B$ y $C$.

Si, como hemos hecho antes, fijamos los si fijamos los puntos $B$ y $C$, los puntos $A$ para los que el triángulo $ABC$ cumple $a = b$ son evidentemente los puntos que están sobre la circunferencia con centro $C$ y radio $CB$. La desigualdad $A \geqslant b$ se cumplirá sobre dicha circunferencia o en su interior. Como lo mismo podemos decir de la desigualdad $a \geqslant c$, los triángulos que buscamos deben estar dentro de la región sombreada de la figura:



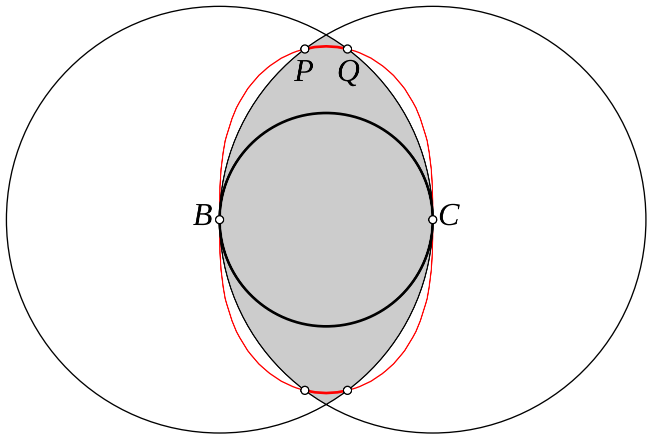

Como hemos visto antes, la condición $a^2 - b^2 - c^2 = 0$ corresponde al caso de que el triángulo $ABC$ es rectángulo en $A$ y su representación gráfica de los posibles vértices $A$ cuando fijamos $B$ y $C$ es una circunferencia con diámetro $BC$. Observemos que esta circunferencia queda completamente dentro de la región sombreada de la figura anterior, así que todos los puntos de la misma corresponden a triángulos solución.




Para obtener la gráfica de la curva $\phi(x, y) = 0$ correspondiente al segundo paréntesis, hacemos:

```
ecuacion = Factor[Last[solucion] /.
    {a → 2, b → √((x - 1)^2 + y^2), c → √((x + 1)^2 + y^2)}];
curva = ImplicitPlot[ecuacion == 0, {x, -1, 1}, {y, -2, 2}]
```

El resultado es una curva cerrada, parecida a una elipse.




Para que un punto de dicha curva sea solución deberá estar en la región sombreada intersección de las circunferencias con radio $BC$ y centros $B$ y $C$, lo cual limita las soluciones a dos pequeños arcos de curva, uno de los cuales tiene extremos $P$ y $Q$ en la figura y otro es el simétrico respecto de la recta $BC$.

Cuando el punto $A$ coincide con $P$, tenemos los ángulos $A = B = 63°23'5.81''$ y $C = 53°7'48.36''$.

Cuando $A$ es el punto medio del arco $PQ$, la distancia de $A$ a la recta $BC$ es

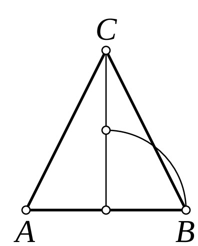
$$\frac{3}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\sqrt{2}}$$

y los ángulos de $ABC$ son $A = 63°14'28.15$ y $B = C = 58°22'45.92''$.

En resumen, los valores que puede tomar el ángulo $A$ son $90°$ o un ángulo comprendido entre $63°14'28.15''$ y $63°23'5.81''$.

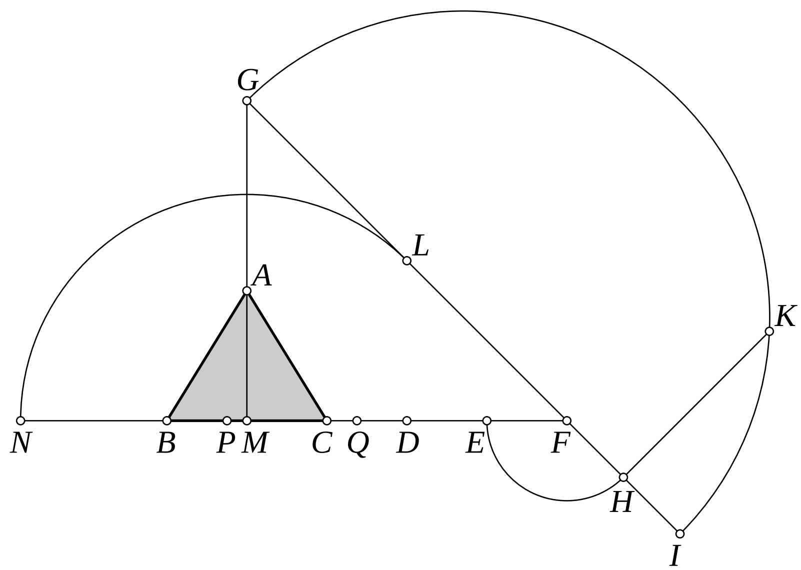
# 5. Detalles

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de la curva obtenida y de las circunferencias con centros $B$ y $C$ podemos ver que las coordenadas de $P$ y $Q$ son, exactamente, $P = (-0.2, 1.6)$ y $Q = (0.2, 1.6)$.




Entonces, cuando $A = P$, el triángulo $ABC$ tendrá lados $a = b = 2$ y $c = 4/\sqrt{5}$, y será semejante a un triángulo de lados $\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2$, es decir un triángulo isósceles cuya base es igual a su altura, lo que permite una construcción muy sencilla con regla y compás de dicho triángulo.

Finalmente, damos una construcción con regla y compás del triángulo $ABC$ cuando éste es isósceles en $A$, es decir cuando $A$ está sobre el punto medio del arco $PQ$ de la curva:




1. Fijamos los puntos $B$ y $C$ sobre una recta.
2. Hallamos el punto medio $M$ de $BC$.
3. Marcamos los puntos $D, E, F$ sobre dicha recta de manera que $BM = MC = CD = DE = EF$.
4. Trazamos la circunferencia con centro $M$ y radio $MF$, que corta en $G$ a la mediatriz de $BC$.
5. Trazamos la circunferencia con centro $F$ y radio $FE$, que corta a la prolongación de $GF$ en $H$. Sobre esta prolongación marcamos el punto $I$ tal que $FH = HI$.
6. Trazamos la semicircunferencia con diámetro $GI$, que corta en $K$ a la perpendicular por $H$ a $GF$.
7. Por otro lado trazamos la circunferencia con centro $M$ y radio $ML$, siendo $L$ el punto medio de $GF$. Esta circunferencia corta en $N$ a la semirrecta $MB$.
8. Con centro $N$ y radio $HK$ trazamos una circunferencia que corta en $P$ a la semirrecta $NB$.
9. Hallamos el punto medio $Q$ del segmento $PE$.
10. Con centro $M$ y radio $QE$ trazamos una circunferencia que corta a la mediatriz de $BC$ en $A$.