Ariel Gustavo Estévez, profesor de Matemática de ESB Nº3 y ESB Nº42, Claypole, Buenos Aires, Argentina

De Investigación

Propuesto por William Rodríguez Chamache. profesor de geometria de la "Academia integral class" Trujillo- Perú

Problema 380

ABC: es un triángulo cualquiera. G: baricentro de ABC

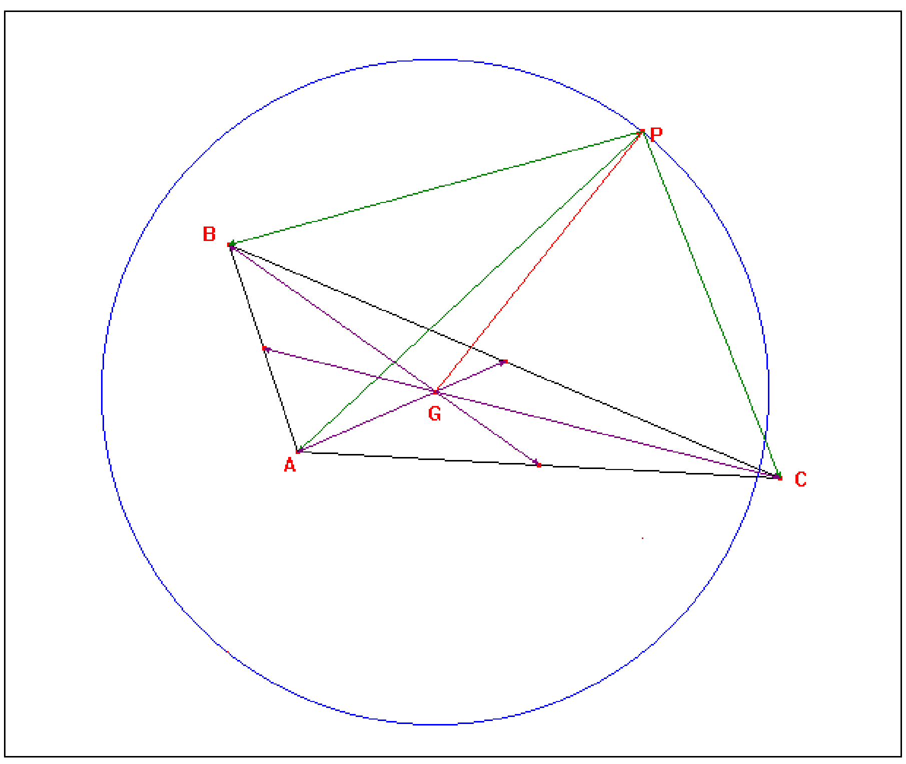
Sea P un punto en la circunferencia tiene como centro el punto G y como radio una longitud cualquiera

Demostrar que: $PA^2 + PB^2 + PC^2$ es constante.

Retali V, Biggiogero, G. (1936, 1979) "La geometria del triangolo " en "Enciclopedia delle matematiche elementari e complementari" Berzolari, Vivanti and Gigli , editores) Vol II , pp 175.

El director agradece a Jeff Brooks y Marcello Brozolo del foro Hyacinthos, la referencia bibliográfica completa.

Para resolver este problema vamos a utilizar vectores centrados en G (baricentro de ABC).



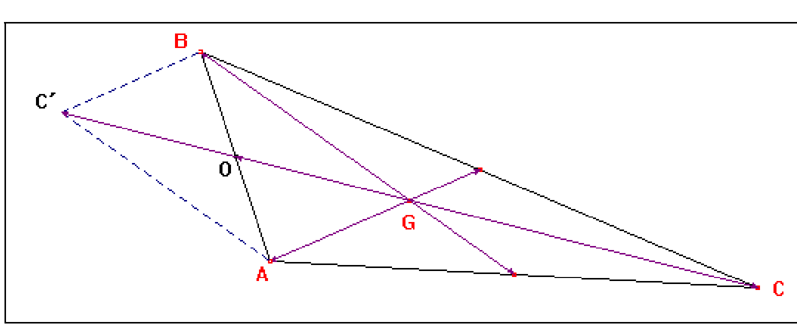
Podemos decir entonces:

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GP}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GP}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GP}\right)^2 = 3\overrightarrow{GP}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 - 2\overrightarrow{GP}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$$

Trabajemos ahora con el último paréntesis $\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$.

Vamos a ver que dicho paréntesis nos da cero. Para ello demostraremos que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$:

1. Para sumar $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ utilizaremos la regla del paralelogramo.



Llamemos O al punto medio del lado BA.

2. $\overline{GO}$ es $\frac{1}{2}$ de $\overline{GC} \rightarrow$ por propiedad del baricentro.

3. $\overline{OC'} \cong \overline{GO} \rightarrow$ por ser correspondientes en triángulos congruentes.

4. Por 2. y 3. $\overline{GO} + \overline{OC'} = \overline{GC}$

5. Por 1., 2., 3. y 4. queda demostrado que los vectores $\overrightarrow{GC'}$ y $\overrightarrow{GC}$ tienen el mismo módulo y dirección pero sentidos opuestos, luego $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

Por último nos queda:

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = 3\overrightarrow{GP}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \text{ ó } PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3\underset{\downarrow}{R}^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

radio de la circunferencia de centro G