Problema 380 de *triánguloscabri*

Francisco Javier García Capitán

1. Enunciado del problema

Problema 380 de *triánguloscabri*. *Sean ABC un triángulo cualquiera y G su baricentro. Sea P un punto en la circunferencia que tiene como centro el punto G y como radio una longitud cualquiera. Demostrar que $PA^2 + PB^2 + PC^2$ es constante.*

Propuesto por William Rodríguez Chamache.

Retali V, Biggiogero, G. (1936, 1979) "La geometria del triangolo"en "Enciclopedia delle matematiche elementari e complementari". Berzolari, Vivanti and Gigli, editores. Vol II, pp 175.

Veremos la demostración de una fórmula sobre los cuadrados de las distancias de un punto M a los vértices de un triángulo de referencia:

Suma de cuadrados de distancias a los vértices. *Sean ABC un triángulo, P y M puntos cualesquiera y $(u : v : w)$ las coordenadas baricéntricas del punto P respecto del triángulo ABC. Entonces,*

$$uMA^2 + vMB^2 + wMC^2 = (u + v + w)MP^2 + \frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{u + v + w}. \quad (1)$$

A continuación, aplicaremos esta fórmula para resolver el problema propuesto.

2. Algunos teoremas previos

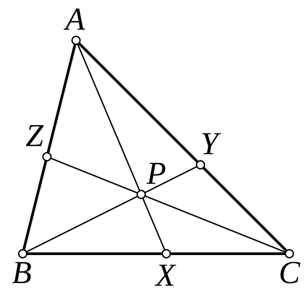
Los teoremas de Van Aubel y de Stewart son muy interesantes en sí mismos y nos servirán para demostrar la fórmula :

Teorema de Van Aubel. *Dado un triángulo ABC y tres cevianas que cortan a los lados BC, CA y AB, en los puntos X, Y, Z respectivamente y que son concurrentes en un punto P, entonces*

$$\frac{AP}{PX} = \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABP)}{(CAP)}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{(BCP)}{(ABP)}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{(CAP)}{(BCP)}.$$



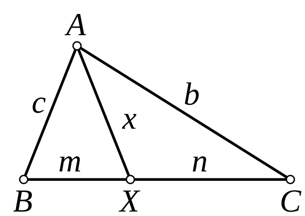
Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PX} &= \frac{(ABP)}{(PBX)} = \frac{(APC)}{(PXC)} = \frac{(APB) + (APC)}{(PXB) + (PXC)} \\ &= \frac{(APB) + (APC)}{(PBC)} = \frac{(APB)}{(PBC)} + \frac{(APC)}{(PBC)} \\ &= \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}. \end{aligned}$$

Teorema de Stewart. *Si AX es una ceviana del triángulo ABC, entonces*

$$b^2 \cdot BX + c^2 \cdot XC = a(AX^2 + BX \cdot XC).$$

Demostración. Llamemos, como en la figura, $m = BX$, $n = XC$, $x = AX$.



Teniendo en cuenta que

$$\cos\angle APB + \cos\angle APC = 0,$$

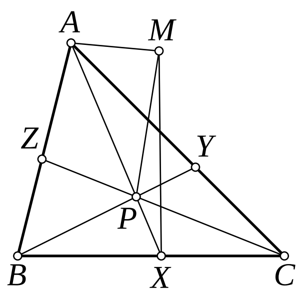
aplicando el teorema del coseno tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{m^2 + x^2 - c^2}{2mx} + \frac{n^2 + xp^2 - b^2}{2nx} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\, &n(m^2 + x^2 - c^2) + m(n^2 + x^2 - b^2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\, &b^2 m + c^2 n = (m+n)x^2 + nm^2 + mn^2 = (m+n)(x^2 + mn) \Rightarrow \\ \Rightarrow\, &b^2 m + c^2 n = a(x^2 + mn). \end{aligned}$$

Suma de cuadrados de distancias a los vértices. *Sean ABC un triángulo, P y M puntos cualesquiera y $(u : v : w)$ las coordenadas baricéntricas del punto P respecto del triángulo ABC. Entonces,*

$$uMA^2 + vBM^2 + wMC^2 = (u + v + w)MP^2 + \frac{a^2 vw + b^2 wu + c^2 uv}{u + v + w}.$$

Demostración. Sean X, Y, Z a los puntos de intersección de las cevianas AP, BP, CP con los las rectas BC, CA, AB. Entonces tendremos $BX : XC = w : v$, $CY : YA = u : w$ y $AZ : ZB = v : u$, por lo que tendremos



$$BX = \frac{aw}{v+w}, XC = \frac{av}{v+w},$$

y según el *teorema de Van Aubel*,

$$\frac{AP}{PX} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AY}{YC} = \frac{v+w}{u},$$

de donde obtenemos

$$AP = \frac{v+w}{u+v+w}AX, \quad PX = \frac{u}{u+v+w}AX.$$

Aplicando el *teorema de Stewart* al triángulo AMX resulta

$$\begin{aligned} & AM^2 \cdot PX + MX^2 \cdot AP = AX \cdot (MP^2 + AP \cdot PX) \\ \Rightarrow \quad & AM^2 \cdot \tfrac{PX}{AX} + MX^2 \cdot \tfrac{AP}{AX} = MP^2 + AP \cdot PX \\ \Rightarrow \quad & AM^2 \cdot \frac{u}{u+v+w} + MX^2 \cdot \frac{v+w}{u+v+w} = MP^2 + \frac{u(v+w)}{(u+v+w)^2}AX^2. \quad (2) \end{aligned}$$

El mismo teorema, aplicado a los triángulos BMC y ABC, da las relaciones

$$\begin{aligned} MX^2 =& MB^2 \cdot \frac{v}{v+w} + MC^2 \cdot \frac{w}{v+w} - \frac{a^2vw}{(v+w)^2}, \\ AX^2 =& \frac{c^2v + b^2w}{v+w} - \frac{a^2vw}{(v+w)^2}, \end{aligned}$$

que, sustituidas en (2), dan

$$uMA^2 + vMB^2 + wMC^2 = (u+v+w)MP^2 + \frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{u+v+w}.$$

3. Solución del problema

Ahora, la solución de nuestro problema es muy fácil, ya que $G = (1 : 1 : 1)$ es el baricentro del triángulo ABC y si M está sobre una circunferencia de centro G y radio ρ, resulta que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3\rho^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Referencias

[1] Vandila, Viorel. *Generalización de una relación de Leibniz y su aplicación al cálculo de distancias entre puntos notables del triángulo*. Gazeta Matematica N^{o} 2/1985, Bucarest, Rumanía.