Problema 393 de *triánguloscabri*. *Si p, r y R, son el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito al triangulo ABC, demostrar que $p^2 - r^2 - 4rR > 0$. ¿Se alcanza la anulación?*

Propuesto por Juan-Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Teniendo en cuenta las fórmulas del área

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

obtenemos que

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad 4rR = \frac{abc}{p}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
p^2 - r^2 - 4rR =& p^2 - \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} - \frac{abc}{p} = \\
=& \frac{p^3 - (p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p + abc - abc}{p} = \\
=& (a+b+c)p - (ab+bc+ca) = \\
=& \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) > 0,
\end{aligned}$$

no cumpliéndose en ningún caso la anulación.