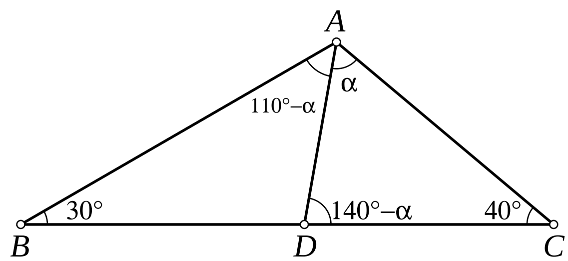
Problema 394 de *triánguloscabri*. *En el triángulo* ABC, $\angle B = 30°$, $\angle C = 40°$. *Se tiene* D *en* BC *tal que* $BD = AC$. *Hallar* $\angle DAC$.

Propuesto por Juan Carlos Salazar.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Es evidente que, considerando D variable sobre BC, la distancia BD es una función continua y estrictamente decreciente del ángulo $\alpha = DAC$.



La relación entre BD y α viene dada por

$$\frac{BD}{\operatorname{sen}(110° - \alpha)} = \frac{AD}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{\operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 30°} \cdot \frac{AD}{\operatorname{sen} 40°} = 2 \operatorname{sen} 40° \cdot \frac{CA}{\operatorname{sen}(140° - \alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \frac{2 \operatorname{sen} 40° \operatorname{sen}(110° - \alpha)}{\operatorname{sen}(140° - \alpha)} \cdot CA = \frac{2 \operatorname{sen} 40° \cos(\alpha - 20°)}{\operatorname{sen}(140° - \alpha)} \cdot CA.$$

por lo que si $BD = CA$, α es la única solución de la ecuación

$$2 \operatorname{sen} 40° \cos(\alpha - 20°) = \operatorname{sen}(140° - \alpha).$$

Para $\alpha = 60°$, tenemos que $2 \operatorname{sen} 40° \cos 40° = \operatorname{sen} 80°$, por lo que $\alpha = 60°$ es el ángulo buscado.