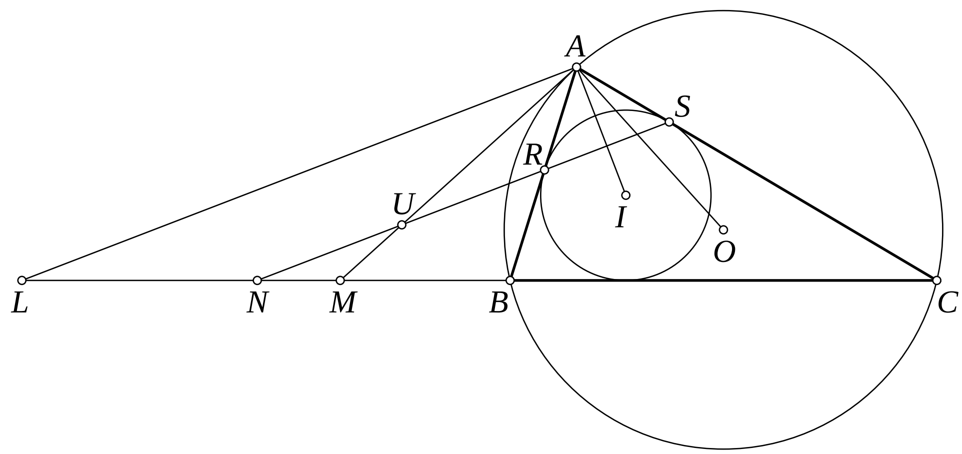
Problema 397 de *triánguloscabri*. *En el triángulo escaleno ABC, con $\angle BAC = 90°$, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta tangente en A a la circunferencia circunscrita corta a la recta BC en M. Sean S y R los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U. Demuestre que el triángulo UMN es isósceles.*

21ª OIM (2006). Guayaquil (Ecuador)

Solución de Francisco Javier García Capitán

No usaremos la condición de que el triángulo ABC es rectángulo en A.



La recta RS es la polar del punto A respecto de la circunferencia inscrita, por lo que RS es perpendicular a la bisectriz AI y paralela a la bisectriz exterior del ángulo A.

Si la bisectriz exterior del ángulo A corta a BC en L, tendremos los ángulos:

$$\begin{aligned}\angle ALM =& \angle ALC = 180 - \angle C - (90 + \tfrac{1}{2}\angle A) = 90 - \angle C - \tfrac{1}{2}\angle A \\ =& \tfrac{1}{2}(\angle B - \angle C), \\ \angle AMC =& 180 - \angle C - \angle MAC = 180 - \angle C - (90 + \angle OAC) \\ =& 180 - \angle C - (90 + 90 - \angle B) = \angle B - \angle C.\end{aligned}$$

Por tanto, $\angle AMC = 2 \cdot \angle ALM$ y el triángulo MLA es isósceles, y en consecuencia MNU también lo es.

Como curiosidad podemos investigar cuándo el triángulo MNU es tal triángulo, es decir, no se reduce a un punto. Para ello, fijamos los vértices B y C y consideramos A variable, resultando un lugar geométrico para A. El resultado es el siguiente:

Si $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$, cuando $A = (x, y)$ está sobre la curva

$$x^8 + 4y^2x^6 + 6y^4x^4 - 6x^4 + 4y^6x^2 - 12y^2x^2 + 8x^2 + y^8 - 6y^4 - 8y^2 - 3 = 0$$

resulta que los puntos M, N y U coinciden.