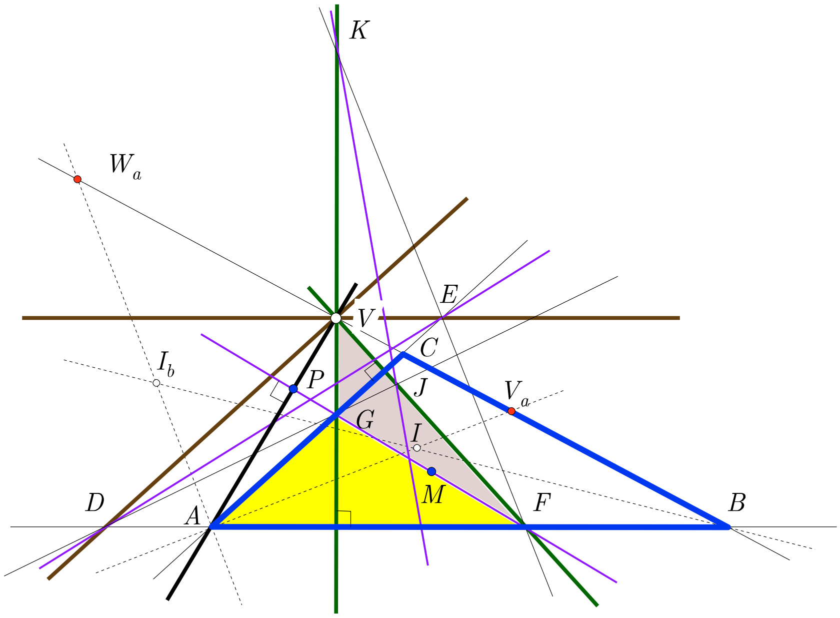
Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo no rectángulo en A y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La paralelas a AC y AB por por V cortan a AB y AC en D y E, respectivamente. La perpendicular a AB por V corta en G a AC. La perpendicular a AC por V corta en F a AB. Además consideramos los puntos de intersección $J = GD \cap VF$ y $K = EF \cap VG$.

a) Demostrar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto si y sólo si AV es una de las bisectrices del ángulo A.

DE es paralela a FG.
FG es paralela a JK.
DG, EF y AV son concurrentes.
El triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles.

b) V es el ortocentro de $\widehat{AFG}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:



Propuesta quincenal de problemas de triángulos para resolverlos con Cabri de Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II (Problema 398. Julio 2007): http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Lo resolveremos utilizando coordenadas baricéntrias(1) relativas al triángulo dado $\widehat{ABC}$, respecto a las cuales, los vértices son:

$$A(1, 0, 0), \qquad B(0, 1, 0), \qquad C(0, 0, 1);$$

las ecuaciones de los lados y de la recta del infinito son(2):

$$BC: \ x = 0, \quad CA: \ y = 0, \quad AB: \ z = 0, \qquad \ell_\infty: \ x + y + z = 0.$$

El incentro I y los exincentros(3) I_a, I_b e I_c:

$$I(a, b, c), \qquad I_a(-a, b, c), \qquad I_b(a, -b, c), \qquad I_c(a, b, -c),$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente.

Las ecuaciones de las bisectrices, interna y externa, por el vértice A son:

$$AI: \ cy - bz = 0, \qquad AI_b: \ cy + bz = 0,$$

y los puntos de intersección de éstas con el lado BC:

$$V_a(0, b, c), \quad W_a(0, -b, c).$$

(1) Una buena referencia para el uso de coordenadas baricéntrias, en problemas relativos a triángulos, es: Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps

Nos referimos a esta obra, por ejemplo, con la cita: Paul Yiu, pág ### (para un hecho contenido en tal página).

(2) Paul Yiu, pág. 46

(3) Paul Yiu, pág. 26

Si una recta ℓ tiene punto del infinito (f,g,h), las coordenadas del punto del infinito de una recta perpendicular a ℓ son[(4)]:

$$(gS_B - hS_C,\ hS_C - fS_A,\ fS_A - gS_B),$$

donde

$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}, \qquad \text{(notación de Conway)}$$

con lo que $S_B + S_C = a^2$, $S_C + S_A = b^2$ y $S_A + S_B = c^2$.

Sea $V(0,1,t)$ un punto en el lado BC, distinto de B y C. La recta paralela por V al lado AB pasa por el punto del infinito $(1,-1,0)$ de éste, por lo que su ecuación es $tx + ty - z = 0$, y $E(1,0,t)$ es el punto de intersección de dicha paralela con el lado AC. Así mismo, el punto de intersección de la paralela a AC por V es $D(t,1,0)$.

Las perpendiculares a AB (con punto del infinito $(1,-1,0)$) y a AC (con punto del infinito $(1,0,-1)$) por V tienen por ecuaciones, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & t \\ -S_B & -S_A & S_A+S_B \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & t \\ S_C & -S_C-S_A & S_A \end{vmatrix} = 0.$$

El punto de intersección G de la primera con el lado AC y F de la segunda con el lado AB son

$$F(-tS_C,\ S_A + S_At + S_Ct,\ 0), \qquad G(-S_B,\ 0,\ S_A + S_B + tS_A).$$

• a1) Para que las rectas DE y FG sean paralelas, sus puntos del infinito han de coincidir:

$$\lambda(1-t,\ -1,\ t) = (S_B - S_Ct,\ S_A + S_At + S_Ct,\ -S_A - S_B - S_At).$$

Esto ocurre cuando

$$t = \pm\frac{\sqrt{S_A+S_B}}{\sqrt{S_A+S_C}} = \pm\frac{c}{b}, \qquad \lambda = \frac{a^2-(b\pm c)^2}{2},$$

o sea, cuando $V(0,1,t)$ coincide con $V_a(0,b,c)$ o $W_a(0,-b,c)$, es decir, cuando AV es una de las bisectrices en A.

Con lo que queda probada la primera equivalencia del apartado a).

• a2) La intersección de las rectas DG y VF da el punto J:

$$DG:\ (S_A+S_B+S_At)x - (S_A+S_B+S_At)ty + S_Bz = 0, \quad VF:\ (S_At + S_At^2 + S_Ct^2)x + S_Ct^2y - S_Ctz = 0,$$

$$J\Big(S_AS_Ct,\ S_BS_C + S_A(S_B+S_C),\ (S_A+S_C)(S_A+S_B+S_At)t\Big).$$

La intersección de las rectas EF y VG nos da el punto K:

$$EF:\ (S_At + S_At^2 + S_Ct^2)x + S_Ct^2y - (S_A + S_At + S_Ct)z = 0, \quad VG:\ (S_A+S_B+S_At)x - S_Bty + SBz = 0,$$

$$K\Big(S_AS_Bt,\ (S_A+S_B)(S_A+S_At+S_Ct),\ (S_AS_B + S_AS_C + S_BS_C)t^2\Big).$$

Para que las rectas FG y JK sean paralelas es necesario y suficiente que tengan el mismo punto el infinito.

Como las coordenadas del punto del infinito de la recta JK se obtiene multiplicando la suma de las coordenadas de K por las coordenadas de J y restándole las coordenadas de K multiplicadas por la suma de las coordenadas de J, debemos resolver las ecuaciones:

$$-(S_At(1+t)(S_A^2(-S_C+S_Bt) + S_BS_C(S_B-S_Ct) + S_A(S_B^2-S_C^2t))) = \lambda(S_B - S_Ct)$$

$$-(S_At(1+t)(S_BS_C^2t + S_A^3(1+t) + S_AS_C(S_Ct + 2S_B(1+t)) + S_A^2(2S_C(1+t) + S_B(2+t)))) = \lambda(S_A + S_At + S_Ct)$$

$$S_At(1+t)(S_B^2S_C + S_A^3(1+t) + S_A^2(S_C + 2S_Ct + 2S_B(1+t)) + S_AS_B(S_B + 2S_C(1+t))) = \lambda(-S_A - S_B - S_At).$$

Con lo que de nuevo se obtiene que FG y JK son paralelalas si y sólo si $t = \pm c/b$, es decir, si y sólo si AV es una de las bisectrices en A.

Queda así establecida el segundo enunciado del apartado a).

• a3) Para establecer el tercer acerto del apartado a), consideramos las ecuaciones de las rectas:

$$AV:\ ty - z = 0, \qquad DG:\ (S_A+S_B+S_At)x - (S_A+S_B+S_At)ty + S_Bz = 0,$$

[(4)] Paul Yiu, pág. 55

$$EF: \ -(S_A + S_At + S_Ct)tx - S_Ct^2y + (S_A + S_At + S_Ct)z = 0.$$

Para que sean concurrentes ha de ser cero el determinante formado por los coeficientes de las tres:

$$\begin{vmatrix} 0 & t & -1 \\ (S_A + S_B + S_At) & -(S_A + S_B + S_At)t & S_B \\ -(S_A + S_At + S_Ct)t & -S_Ct^2 & (S_A + S_At + S_Ct) \end{vmatrix} = 0, \qquad t = \pm\frac{\sqrt{S_A + S_B}}{\sqrt{S_A + S_C}} = \pm\frac{c}{b}.$$

De nuevo V ha de coincidir con V_a o con W_a.

• a4) Probemos ahora que el triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles sólo cuando AV es una de las bisectrices en A (último estamento del apartado a).

En primer lugar, demostremos que AV siempre es perpendicular a FG, cuando V varía en el lado BC de $\widehat{ABC}$. Para ello, recordemos la siguiente caraterización[(5)] de rectas perpendiculares, en coordenadas baricéntricas:
"*Dos rectas con puntos del infinito (f, g, h) y (f', g', h') son perpendiculares si y sólo si*

$$S_Aff' + S_Bgg' + S_Chh' = 0."$$

En nuestro caso, el punto del infinito de la recta FG es $(S_B - S_Ct, \ S_A + S_At + S_Ct, \ -S_A - S_B - S_At)$ y el de la recta AV es $(1 + t, -1, -t)$, luego, AV y FG son perpendiculares, pues:

$$S_A(1 + t)(S_B - S_Ct) + S_B(-1)(S_A + S_At + S_Ct) + S_B(-t)(-S_A - S_B - S_At) = 0.$$

Como consecuencia, AV y GV son dos alturas del triángulo $\widehat{AFG}$; es decir, V es su ortocentro. Queda así establecido el apartado b).

Para que $\widehat{VFG}$ sea isósceles, la perpendicular por V a su base FG, que es AV, ha de pasar por el punto medio M de FG. El punto medio de FG es $M(-S_B - S_Ct, \ S_A + S_At + S_Ct, S_A + S_B + S_At)$, e imponiendo que esté en la recta $AV : ty - z = 0$ se tiene que

$$t = \pm\frac{c}{b}.$$

Con lo que el problema queda resuelto. Si el ángulo en A es recto o V coincide con uno de los vértices B o C, las paralelas y las perpendiculares a los catetos por V coinciden dos a dos, y no tiene sentido el planteamiento del mismo.

Observaciones adicionales.-

— Para demostrar la afirmación cuarta del apartado a):

"El triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles si y sólo si AV es una de las bisectrices del ángulo A",

debemos demostrar que el punto medio

$$M(-S_B - S_Ct, \ S_A + S_At + S_Ct, S_A + S_B + S_At)$$

de FB ha de coincidir con el punto de intersección P de las rectas AV y FG.

Cuando V varía sobre el lado BC el punto M describe una recta y P una cúbica de ecuaciones paramétricas respectivas:

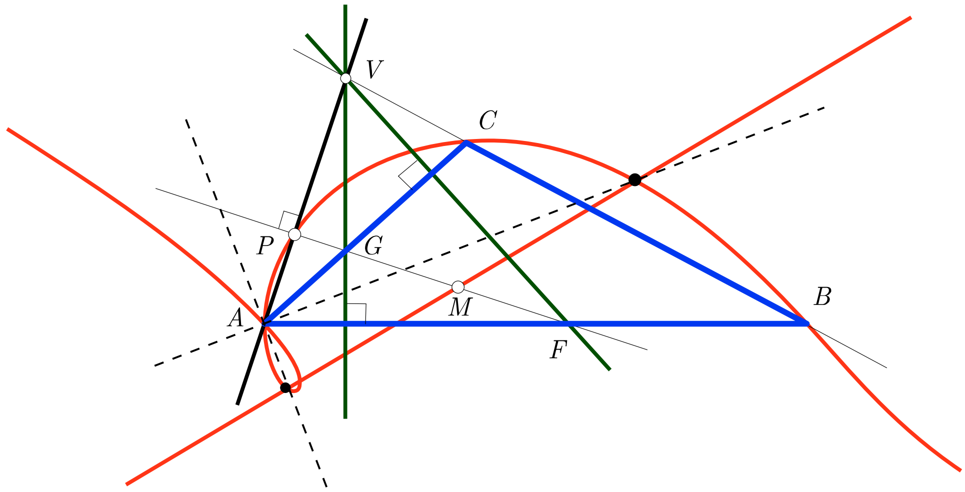
$$\begin{array}{ll} x = -S_B - S_Ct & \qquad x = -(S_BS_C + S_A(S_B + S_C))t(1 + t) \\ y = S_A + S_At + S_Ct & \qquad y = (S_A + S_B + S_At)(S_A + S_At + S_Ct) \\ z = S_A + S_B + S_At & \qquad z = t(S_A + S_B + S_At)(S_A + S_At + S_Ct) \end{array}$$

Para determinar los puntos comunes a estas curvas, debemos encontrar los valores de t para que sus coordenadas coincidan, $\{P\} = \lambda\{M\}$, obteniéndose que

$$t = \pm\frac{c}{b}, \qquad \lambda = \pm\frac{c(-a^2 \pm (b + c)^2)}{2b}.$$

lo que equivale a que el punto AV sea una de las bisectrices en A. Las rectas que unen el vértice A con los de intersección de recta y cúbica (obtenidas como lugares geométricos) cortan al lado BC en los puntos que satifacen la condición impuesta.

(5) Paul Yiu. pág. 55



El tercer punto de intersección de la recta (lugar geométrico de M) con la cúbica (lugar geométrico de P) no corresponde a un mismo valor de t.

— Para plantear el problema cíclicamente a todos los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$, cambiamos la notación de la forma siguiente:

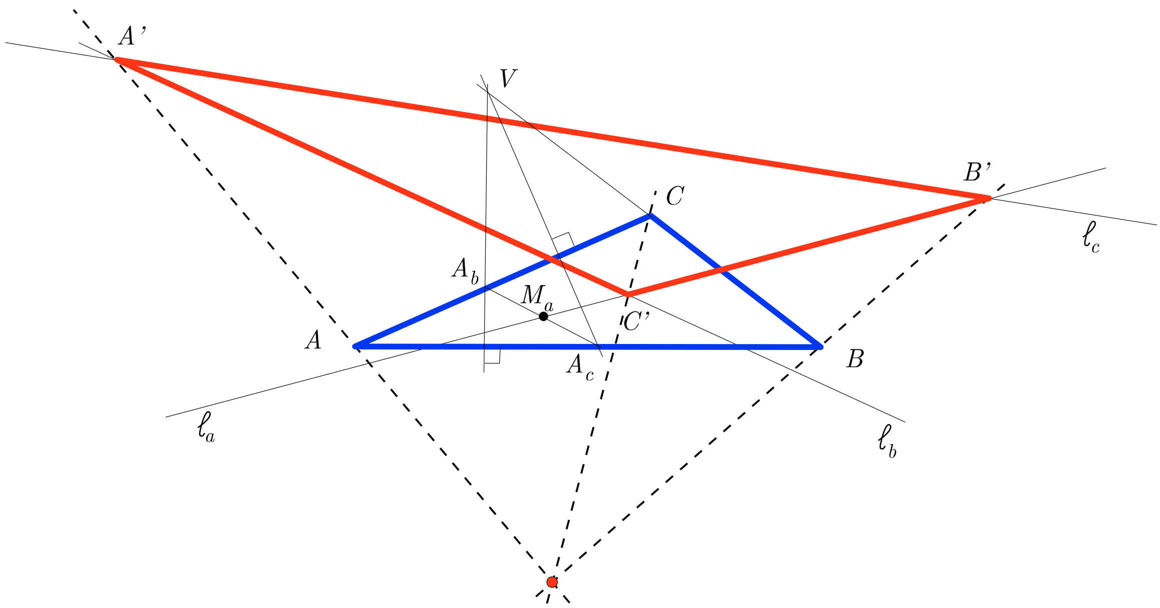
Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo acutángulo y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La perpendicular a AB por V corta en A_b a AC. La perpendicular a AC por V corta en A_c a AB. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_a de A_bA_c, cuando V varía en el lado BC, es una recta ℓ_a.

Si ahora el punto V es un punto de la recta AC, la perpendicular a AB por V corta a BC en B_a y la perpendicular a BC por V corta a AB en B_c. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_b de B_aB_c, cuando V varía en el lado AC, es una recta ℓ_b.

Finalmente, si el punto V es un punto de la recta AB, la perpendicular a BC por V corta a AC en C_b y la perpendicular a AC por V corta a BC en C_a. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_c de C_aC_b, cuando V varía en el lado AB, es una recta ℓ_c.

Las ecuaciones paramétricas de estas rectas,descritas por M_a, M_b y M_c, son:

$$\ell_a : \begin{cases} x = -S_B - S_C t \\ y = S_A + S_A t + S_C t \\ z = S_A + S_B + S_A t \end{cases} \qquad \ell_b : \begin{cases} x = S_B + S_B t + S_C t \\ y = -S_A - S_C t \\ z = S_A + S_B + S_B t \end{cases} \qquad \ell_c : \begin{cases} x = -S_C - S_B t - S_C t \\ y = -S_A - S_C - S_C t \\ z = S_A + S_B t \end{cases}$$



Ocurre entonces que las tres rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c determinan un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$ con centro de perspectividad en el punto de coordenadas baricéntricas

$$\left(S_A^4S_B^4 + S_A^4S_C^4 - S_B^4S_C^4 - 2S_A^4S_B^2S_C^2, \quad S_B^4S_C^4 + S_B^4S_A^4 - S_C^4S_A^4 - 2S_B^4S_C^2S_A^2, \quad S_C^4S_A^4 + S_C^4S_B^4 - S_A^4S_B^4 - 2S_C^4S_C^2S_B^2\right).$$

Se trata de un punto denominado "triangle center" en "The Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)" de Clark Kimberling[6], ya que la primera componente de sus coordenadas

$$f(a,b,c) = S_A^4 S_B^4 + S_A^4 S_C^4 - S_B^4 S_C^4 - 2S_A^2 S_B^2 S_C^4,$$

es una función homogénea de las longitudes de los lados de $\widehat{ABC}$ y verifica que tal punto se expresa por

$$\Big(f(a,b,c), \quad f(b,c,a), \quad f(c,a,b)\Big).$$

Y además, se verifica que $f(a,b,c) = f(a,c,b)$.

Si evaluamos las coordenadas del centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ en un triángulo de lados $a = 6cm$, $b = 9cm$ y $c = 12cm$, la distancia de dicho punto al lado menor BC es[7]

$$9.8010047378cm.$$

http://www.gt.matfun.ull.es/angel/pdf/ejtr2224.pdf

[6] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html

[7] No figura en la Enciclopedia ETC, pero es el conjugado isogonal del X(1498)