# Las circunferencias de Droz-Farny

Francisco Javier García Capitán

Con motivo del problema 400
de *triánguloscabri*

# Índice



## 1. Introducción

El Laboratorio Virtual de Triángulos [1] llega a su problema número 400. Con este motivo, presentamos este trabajo sobre las circunferencias de Droz-Farny.

A lo largo de todo este artículo, $ABC$ es un triángulo, $H$ su ortocentro, $DEF$ su triángulo órtico (es decir, $D$, $E$, $F$ son los pies de las alturas sobre $BC$, $CA$, $AB$, respectivamente), y $XYZ$ es su triángulo medial (es decir, $X$, $Y$ y $Z$ son los puntos medios de los lados $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente. Finalmente $R$, es el radio de la circunferencia circunscrita a $ABC$.

## 2. Resultados preliminares

Antes de ver las circunferencias de Droz-Farny repasamos unos resultados elementales que usaremos, y que tienen interés también en sí mismos.

[1] http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

## 2.1. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo.

**Lema 1.** *En el triángulo $ABC$, si la altura que pasa por $A$ corta al lado $BC$ en $D$, y si consideramos distancias con signo en la recta $BC$, se cumple que*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

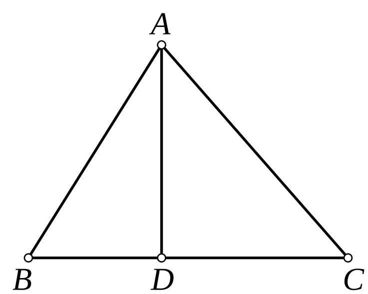


FIG. 1: $C$ agudo.

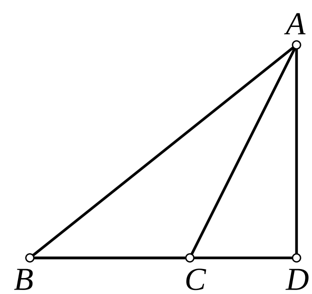


FIG. 2: $C$ obtuso.

*Demostración.* Según vemos en las figuras 1 y 2, si $C$ es agudo

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = (BC - DC)^2 + (AC^2 - DC^2) = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot DC,$$

mientras que si $C$ es obtuso

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 = (BC + CD)^2 + (AC^2 - DC^2) = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD.$$

## 2.2. Longitud de la mediana

Como aplicación de la fórmula anterior podemos calcular la longitud de una mediana del triángulo en función de los lados:

$$AM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right) - \frac{1}{4}BC^2.$$

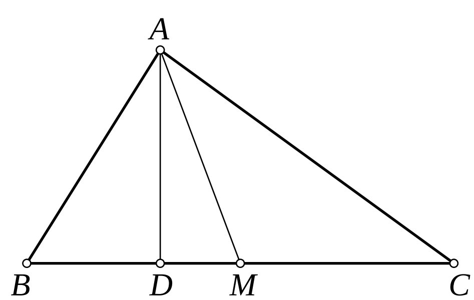


FIG. 3: Longitud de la mediana.

*Demostración.* En efecto, si aplicamos (Figura XX) las fórmulas del apartado anterior a los triángulos $ABM$ y $AMC$ obtenemos

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2BM \cdot DM,$$
$$AC^2 = AM^2 + MC^2 + 2CM \cdot DM,$$

de donde, al ser $AM = MC = \frac{1}{2}BC$, resulta

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2(\tfrac{1}{2}BC)^2.$$

□

### 2.3. Las alturas y el ortocentro

**Lema 2.** *Sean $ABC$ un triángulo y $H$ su ortocentro. Si la altura $AH$ corta en $D$ a la recta $BC$ y en $D'$ a la circunferencia circunscrita a $ABC$ entonces $HD = DD'$.*

*Demostración.* En efecto, como vemos en la figura 4, donde hemos trazado también la altura $BE$,

$$\begin{aligned}\angle BHD' &= \angle BHD = 90^\circ - \angle HBD = 90^\circ - \angle EBC = \angle C,\\ \angle BD'H &= \angle BD'A = \angle BCA = \angle C,\end{aligned}$$

por lo que el triángulo $BD'H$ es isósceles y los triángulos $BDH$ y $BDD'$ son congruentes, luego $HD = DD'$.

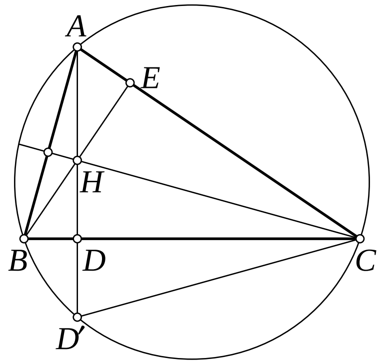


Fig. 4: $HD = DD'$.

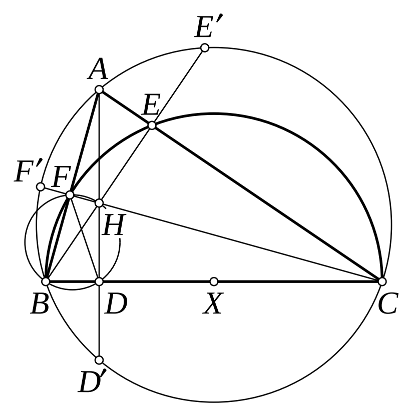


Fig. 5: $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$.

**Corolario 1.** *Si $D$, $E$, $F$ son los pies de las alturas $AH$, $BH$, $CH$ sobre los lados $BC$, $CA$, $AB$ respectivamente, entonces $AH \cdot DH = BH \cdot EH = CH \cdot FH$.*

*Demostración.* Según vemos en las figuras 4 y 5, $AH \cdot DH = \frac{1}{2}(AH \cdot D'H)$ es decir la mitad de la potencia de $H$ respecto de la circunferencia circunscrita, y el mismo valor tendrán los productos $BH \cdot EH$ y $CH \cdot FH$.

**Lema 3.** *Los triángulos $DBF$, $ECD$ y $FAE$ son semejantes a $ABC$.*

*Demostración.* En efecto, $D$ y $F$ están sobre la circunferencia de diámetro $BH$, así que $DHFB$ es cíclico y $\angle BDF = \angle BHF = \angle BAE = \angle A$. De la misma forma, $\angle BFD = \angle C$.

**Corolario 2.** *$BH = 2R\cos B$, etc.*

*Demostración.* En efecto, tenemos $\cos B = BD/AB$. Como $DBF$ es semejante a $ABC$ y $BH$ es el diámetro de $DBF$ tenemos $\cos B = BH/2R$.

**Corolario 3.** *$BH^2 + b^2 = 4R^2$, etc.*

*Demostración.* $BH^2 + b^2 = 4R^2 \cos^2 B + 4R^2 \operatorname{sen}^2 B = 4R^2$.

**Corolario 4.** *El valor común de los productos anteriores es*

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 4R^2.$$

*Demostración.* En efecto, $HA \cdot HD = HB \cdot HE$ es la potencia de $H$ respecto a la circunferencia con diámetro $BC$ (y centro $X$), por lo que $HA \cdot HD = XH^2 - XB^2$. Ahora, siendo $HX$ la mediana del triángulo $HBC$, tenemos $XH^2 + \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}(BH^2 + CH^2)$. Entonces

$$\begin{aligned} HA \cdot HD =& XH^2 - XB^2 = XB^2 - \frac{1}{2}(BH^2 + CH^2) + \frac{1}{4}BC^2 = \\ =& \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}\left(4R^2 - b^2 + 4R^2 - c^2\right) + \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 4R^2. \end{aligned}$$

## 2.4. Rectas y puntos isogonales

### 2.4.1. Definiciones

**Definición.** *Siendo $P$ y $Q$ dos puntos del plano del triángulo $ABC$, las rectas $AP$ y $AQ$ se llaman isogonales respecto del ángulo $A$ si forman el mismo ángulo con los lados de dicho ángulo (o, lo que es lo mismo, si son simétricas respecto de la bisectriz de dicho ángulo).*

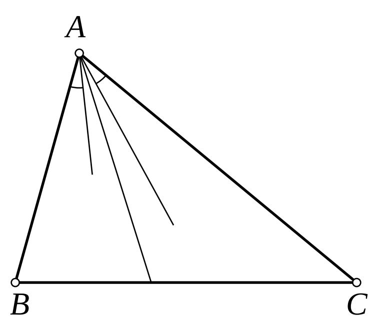

Fig. 6: Rectas isogonales.

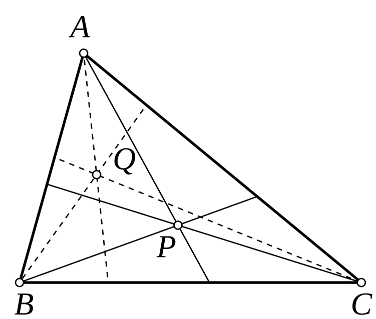

Fig. 7: Puntos isogonales.

El hecho fundamental sobre líneas isogonales permite definir los puntos isogonales:

**Teorema 1.** *Si $P$ es un punto cualquiera, las rectas isogonales de $AP$, $BP$, $CP$ respecto de los ángulos $A$, $B$, $C$ son concurrentes.*

**Definición.** *Si $P$ es un punto cualquiera, el punto donde concurren las rectas isogonales de $AP$, $BP$, $CP$ respecto de los ángulos $A$, $B$, $C$ se denomina conjugado isogonal de $P$.*

Si $Q$ es el conjugado isogonal de $P$, entonces $P$ es el conjugado isogonal de $Q$, así que los puntos isogonales van emparejados.

Es evidente que el incentro es conjugado isogonal de sí mismo, y es fácil comprobar que el ortocentro y el circuncentro son conjugados isogonales.

### 2.4.2. La circunferencia pedal

Si $P$ y $Q$ son dos puntos isogonales tenemos (Figura 8) el siguiente

**Teorema 2.** *Los pies de $P$ y $Q$ sobre los lados del triángulo $ABC$ son seis puntos que están en una misma circunferencia, llamada circunferencia pedal del par $(P, Q)$.*

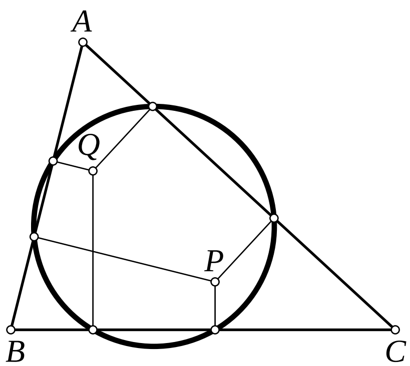


FIG. 8: Circunferencia pedal.

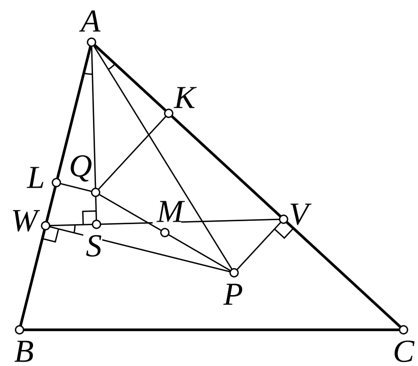


FIG. 9: Demostración.

*Demostración.* Sean $V, W$ y $K, L$ los pies de $P$ y $Q$ sobre las rectas $AC$ y $AB$, respectivamente. Sea $M$ el punto medio de $PQ$. Supongamos que la recta $AQ$ corta a $VW$ en $S$.

En primer lugar, $AS$ es perpendicular a $VW$. En efecto, el cuadrilátero $AWKV$ es cíclico, por lo que, al ser $AP$ y $AQ$ isogonales, tenemos $\angle VWP = \angle PAV = \angle WAQ$. Entonces, el ángulo formado por $AQ$ y $VW$ será el mismo que el formado por $WP$ y $WA$, un ángulo recto.

Ahora, como los cuadriláteros $LWSQ$ y $QSVK$ son cíclicos, usando la potencia del punto $A$ respecto de las circunferencias correspondientes tenemos $AL \cdot AW = AQ \cdot AS = AK \cdot AV$, por lo que $LWVK$ también es un cuadrilátero cíclico.

Finalmente, $M$ es el centro de la circunferencia $LWVK$, ya que la mediatriz de $LW$, por ser paralela a $LQ$ y $WP$, pasará por el punto medio de $PQ$, y lo mismo la mediatriz de $KV$. Por tanto las dos mediatrices se cortan en $M$.

Así queda demostrado que $M$ es el centro de una circunferencia que pasa por los pies de $P$ y $Q$ sobre las rectas $AB$ y $AC$. También $M$ es centro de otra circunferencia que pasa por los pies de $P$ y $Q$ sobre las rectas $AB$ y $BC$. Ambas circunferencias coinciden por ser concéntricas y tener comunes los pies de $P$ y $Q$ sobre la recta $AB$. □

# 3. Un teorema de Droz-Farny

El primero de los siguientes teoremas fueron enunciados por Steiner, sin demostración, como era habitual en él. La demostración y extensiones que siguen se deben a Droz-Farny (*Mathesis*, 1901, p. 22).

**Teorema de Droz-Farny.** *Si una circunferencia con centro $H$ corta a los lados $YZ$, $ZX$, $XY$ del triángulo medial en $P_1, Q_1$, $P_2, Q_2$, $P_3, Q_3$ respectivamente, entonces*

$$AP_1 = BP_2 = CP_3 = AQ_1 = BQ_2 = CQ_3.$$

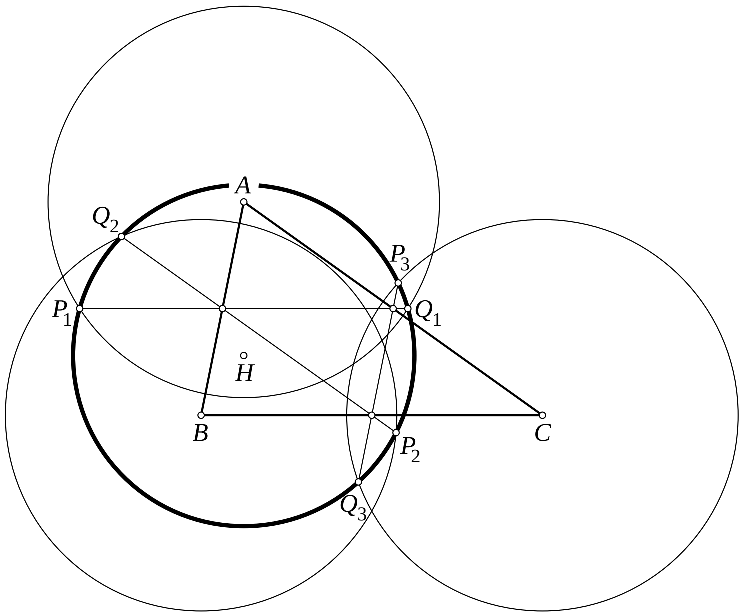


Fig. 10: Un teorema de Droz-Farny.

## 3.1. Demostración del teorema

Sea $U$ cualquier punto sobre $YZ$, la paralela media a $BC$, y sea $M$ el punto medio de la altura $AD$.

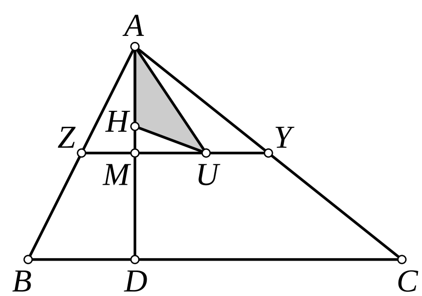


Fig. 11: Demostración del teorema.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} AU^2 =& AH^2 + UH^2 + 2 \cdot AH \cdot HM = UH^2 + AH(AH + 2 \cdot HM) = \\ =& HU^2 + AH(AM + HM) = HU^2 + AH(MD + HM) = \\ =& HU^2 + AH \cdot HD. \end{aligned}$$

De la misma forma, si $V$ es un punto sobre la paralela media $ZX$ a $CA$, será $BV^2 = HV^2 + BH \cdot HE$. Y como, según el corolario 1, es $BH \cdot HE = AH \cdot HD$, si además es $HU^2 = HV^2$, tendremos $AU^2 = BV^2$.

Recíprocamente,

**Recíproco del teorema de Droz-Farny.** *Si trazamos circunferencias iguales con centro los vértices de un triángulo $ABC$, cortarán a los lados del triángulo medial en seis puntos que están en una misma circunferencia cuyo centro es el ortocentro del triángulo.*

*Demostración.* Basta usar de nuevo las igualdades $AU^2 = HU^2 + AH \cdot HD$ y $BV^2 = HV^2 + BH \cdot HE$, donde tenemos ahora $AU = BV$ y $BH \cdot HE = AH \cdot HD$, de donde deducimos que $HU = HV$. □

## 3.2. Un caso particular

**Lema 4.** *Si $\rho$ es el radio de las circunferencias iguales con centros $A$, $B$ y $C$, y $R_H$ es el radio de la circunferencia con centro $H$ entonces*

$$R_H^2 = 4R^2 + \rho^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

*Demostración.* Basta sustituir en la fórmula $AU^2 = HU^2 + AH \cdot HD$ los valores $AU = \rho$, $HU = R_H$, $AH \cdot HD = 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. □

**Corolario 5.** *Las circunferencias con centros $A$, $B$, $C$ y la circunferencia con centro $H$ tendrán ambas el mismo radio $R$ que la circunferencia circunscrita si y solo si el triángulo $ABC$ es rectángulo.*

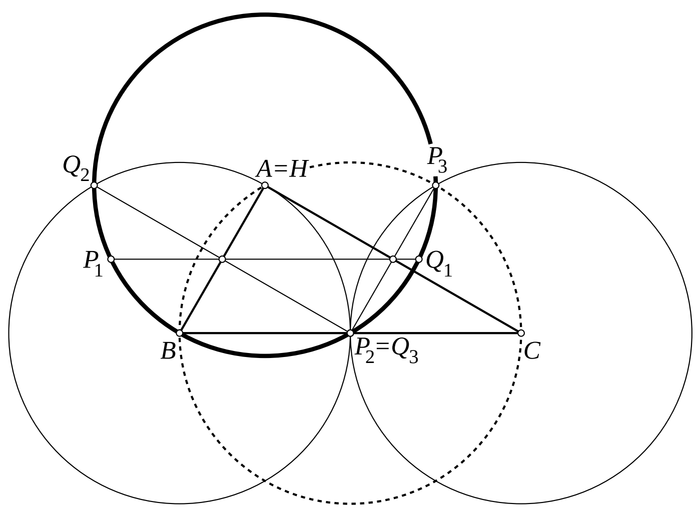


FIG. 12: Todos iguales.

*Demostración.* Basta tener en cuenta que $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 4R^2$ se factoriza como

$$\frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{2(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)}.$$

□

**Corolario 6.** *Si se trazan circunferencias iguales a la circunferencia circunscrita con centros en los vértices de un triángulo, cortarán a los lados correspondientes del triángulo medial en puntos sobre una circunferencia con centro $H$ y radio $R_H$ tal que*

$$R_H^2 = 5R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

## 4. Más circunferencias de Droz-Farny

**Teorema 3.** *Si se trazan circunferencias con centros los pies de las alturas pasando por el circuncentro, cortarán a los lados correspondientes en seis puntos sobre una circunferencia con centro $H$.*

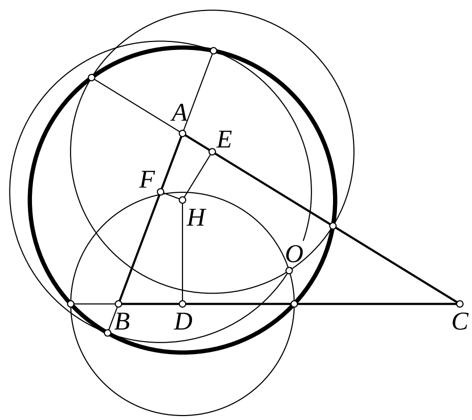


Fig. 13: Circunferencia con centro $H$.

Si intercambiamos los papeles del circuncentro y el ortocentro en el teorema anterior, resulta que los pies del circuncentro son los puntos medios de los lados. Resultaría el siguiente teorema, que también es cierto:

**Teorema 4.** *Si se trazan circunferencias con centros los puntos medios de los lados y pasando por el circuncentro, cortarán a los lados correspondientes en seis puntos sobre una circunferencia con centro $O$, igual que la del teorema anterior.*

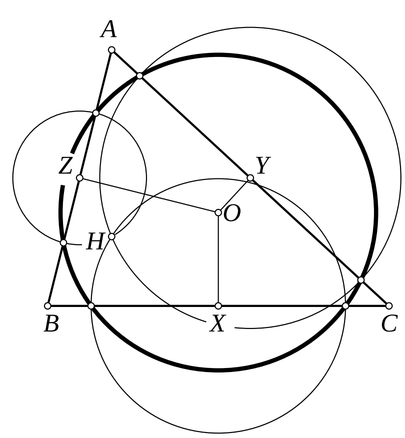


Fig. 14: Circunferencia con centro $O$.

Los dos teoremas anteriores pueden generalizarse para puntos $P$ y $Q$ que, como el circuncentro y ortocentro, sean conjugados isogonales.

**Teorema 5.** *Sean $P$ un punto y $Q$ su conjugado isogonal respecto el triángulo $ABC$. Sean $D, E, F$ las proyecciones de $P$ sobre los lados de $ABC$. Se trazan* *las circunferencias de centros $D, E, F$ que pasan por $Q$. Estas circunferencias cortan a los lados en seis puntos que están sobre una circunferencia con centro $P$, que se llama la circunferencia de Droz-Farny de $P$ respecto $ABC$. Si se hace lo mismo con $Q$, se obtiene otra circunferencia del mismo radio.*

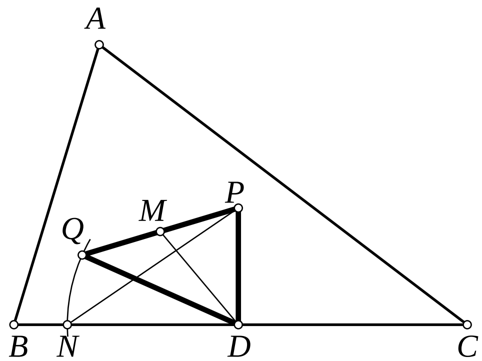


Fig. 15: Cálculo de $PN^2$.

*Demostración.* Sean $M$ el punto medio de $PQ$ y $N$ uno de los puntos en que la circunferencia con centro $D$ y radio $DQ$ corta a la recta $BC$. Usando el teorema de Pitágoras y la fórmula de la longitud de la mediana tendremos

$$PN^2 = PD^2 + DN^2 = PD^2 + DQ^2 = 2DM^2 + \frac{1}{2}PQ^2,$$

es decir $N$ estará sobre una circunferencia con centro $P$ y cuyo radio sólo depende de $DM$, radio de la circunferencia pedal de $P$ y $Q$, y de $PQ$, la distancia entre $P$, y $Q$.

Además, queda claro, que al intercambiar los papeles de $P$ y $Q$ resultará otra circunferencia con el mismo radio. □

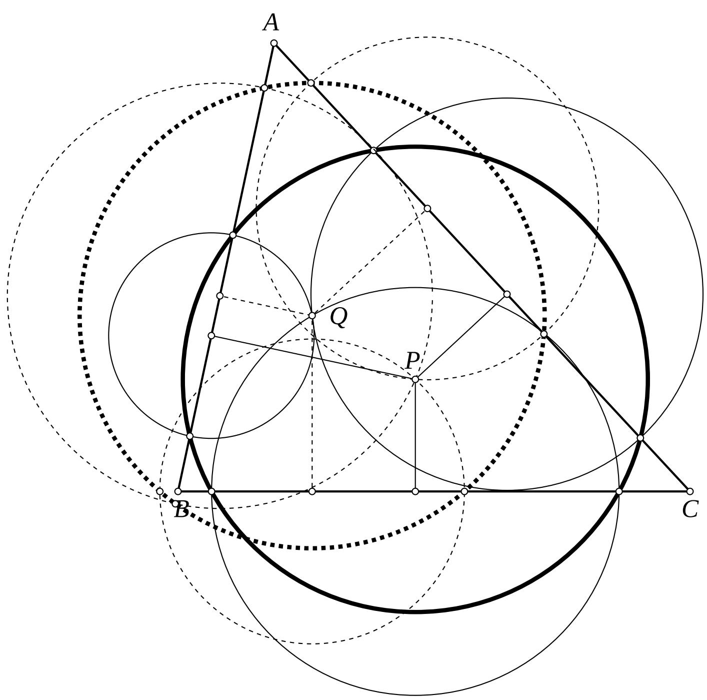


Fig. 16: Circunferencias de Droz-Farny.

## Referencias

[1] Eves, H. Problema 2.3.8 en *A Survey of Geometry*, Volumen 1. Boston: Allyn and Bacon Inc., pág. 83, 1963.

[2] Honsberger, R. "The Droz-Farny Circles." §7.4 (ix) en *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., págs. 69-72, 1995.

[3] Johnson, R. A. *Advanced Euclidean Geometry*. Nueva York: Dover, 1960. Reedición de *Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*. Boston: Houghton Mifflin, págs. 256-258, 1929.