

Construir un triángulo conocidos un lado, el ángulo opuesto y el radio de la circunferencia inscrita.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 401.

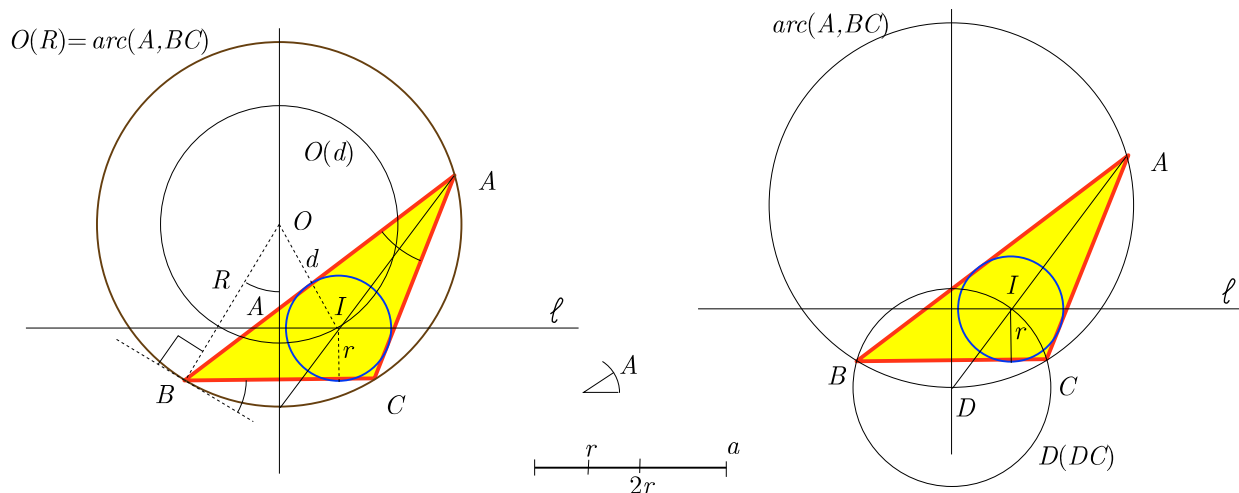
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Con el siguiente enunciado

Construir un triángulo dado : Un lado a , el inradio r , y la medida del ángulo A opuesto al lado a .

Hiebert, J (1986): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.

Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. London. (p. 245)



Trazado el el segmento BC de longitud dada a , construimos el arco capaz de ángulo dado A sobre BC , su centro será el circuncentro del triángulo $\widehat{ABC}$ a determinar.

De las fórmulas

$$a = 2R \sin A, \quad d^2 = R^2 - 2rR,$$

podemos determinar el radio R de la circunferencia circunscrita y la distancia d entre el circuncentro O y el incentro I , ya que se da el radio r de la circunferencia inscrita.

La intersección de la circunferencia $O(d)$ de centro en O y radio d , con la recta ℓ paralela a BC a una distancia r , nos da el incentro. Las tangentes a $I(r)$ desde B y C se cortan en un punto A sobre $O(R)$ (porismo de Poncelet), que es el vértice A del triángulo buscado $\widehat{ABC}$.

Ver los casos de resolución de triángulos, conociendo a, R, r y A, R, r para las restricciones entre los datos dados, para que la construcción sea posible.

Solución de Fursenko:

Construimos el arco capaz $\text{arc}(A, BC)$ sobre $BC = a$, trazamos la paralela ℓ a BC a una distancia r . Sea D el punto donde la mediatriz a BC corta al arco capaz $\text{arc}(\pi - A, BC)$ del suplementario de A sobre BC . Uno de los puntos de corte de ℓ con la circunferencia de centro D y radio DC es I . La recta DI corta al arco capaz $\text{arc}(A, BC)$ en el vértice A del triángulo buscado.

Para el triángulo $\widehat{ABC}$ pueda ser construido ha de existir entre los datos las siguientes restricciones:

$$a > 2r, \quad \sin A < \frac{8ra(a^2 - 4r^2)}{(a^2 + 4r^2)^2}.$$

<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf>
<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2110.pdf>