

Problema 402 de *triángulos cabri*. Triángulos Pitagóricos. *Prácticamente todo el mundo conoce que $3^2 + 4^2 = 5^2$ es la más simple aplicación del Teorema de Pitágoras que establece que la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. Pero en comparación muy pocos conocen que 5, 12, y 13 satisfacen la misma relación sin ser proporcionales a 3, 4 y 5. Y muchos menos todavía podrían dar los lados de un tercer “triángulo pitagórico” distinto de los dos mencionados, por ejemplo, 7, 24 y 25.*

Albert H. Beiler. Recreations in the theory of numbers (The queen of mathematics entertains). Dover Publications Inc.

Los triángulos rectángulos con lados enteros reciben el nombre de triángulos pitagóricos.

- A) Hallar las fórmulas que dan lados enteros para un triángulo rectángulo.*
- B) Mostrar que en todo triángulo pitagórico: hay uno de los lados que es siempre divisible por 3 y uno por 5; el producto de los dos catetos es siempre divisible por 12 y el producto de los tres lados es siempre divisible por 60.*
- C) Hallar, como propone Diofanto en el problema 18 del libro VI de su Aritmética, los triángulos pitagóricos en el que la longitud de la bisectriz de uno de los ángulos agudos es racional.*

Propuesto por José María Pedret. Ingeniero Naval. (Esplugas de Llobregat, Barcelona).

Solución de Francisco Javier García Capitán

Usaremos los símbolos (x, y) y (x, y, z) para representar al máximo común divisor de x, y y de x, y, z respectivamente. También usaremos el siguiente

Lema. *Si x, y, z son enteros positivos tales que $xy = z^2$ entonces x e y son de la forma $x = r^2$, $y = s^2$ para ciertos números enteros r y s .*

- A) Hallar las fórmulas que dan lados enteros para un triángulo rectángulo.*

Queremos resolver en $\mathbb{Z}$ la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Si x, y, z es una solución de (1) sea $d = (x, y)$, donde (x, y) representa aquí el máximo común divisor. Entonces $d^2 | z^2$ y por tanto $d | z$, y como $(x, y, z) = ((x, y), z)$ se cumple siempre, tenemos que $(x, y, z) = d$. De la misma forma, $(x, y, z) = (x, y) = (y, z) = (z, x) = d$, y

$$\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \left(\frac{z}{d}\right)^2, \quad \left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) = \left(\frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right) = \left(\frac{z}{d}, \frac{x}{d}\right) = 1.$$

Llamemos *solución primitiva* a una solución x_1, y_1, z_1 de (1) en la que los tres números son primos relativos dos a dos. Entonces a cada solución x, y, z puede expresarse en la forma dx_1, dy_1, dz_1 , siendo x_1, y_1, z_1 una solución primitiva. Recíprocamente, si x_1, y_1, z_1 es una solución primitiva de (1), entonces dx_1, dy_1, dz_1 es una solución de (1) para cualquier entero d . Por tanto, basta con buscar las soluciones primitivas de nuestra ecuación.

Por la simetría respecto de x e y , restringimos nuestra búsqueda a los casos en que y es par y x, z son impares. Entonces, la ecuación (1) puede escribirse

$$\frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2} = \left(\frac{y}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} \left(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}\right) &\left| \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = z, \right. \\ \left(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}\right) &\left| \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} = x, \right. \end{aligned}$$

tenemos

$$\left(\frac{z+x}{2}, \frac{z-x}{2}\right) = 1.$$

Esto indica que, teniendo en cuenta (2),

$$\frac{z+x}{2} = r^2, \quad \frac{z-x}{2} = s^2$$

para ciertos enteros positivos r, s . Sobre estos números r y s podemos decir que $(r, s) = 1$, $r > s$, $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$ y $z = r^2 + s^2$. También, por ser z impar, r y s tienen distinta paridad, uno es par y el otro impar.

Recíprocamente, sean r y s dos números enteros positivos de distinta paridad tales $(r, s) = 1$. Entonces si $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + s^2$, tenemos que x, y, z son positivos y

$$x^2 + y^2 = (r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 = (r^2 + s^2)^2 = z^2.$$

Además es fácil ver que $(x, y) = 1$, y que y es par. Entonces, x, y, z es una solución primitiva con y par. Entonces hemos demostrado el siguiente

Teorema. *Las soluciones primitivas de $x^2 + y^2 = z^2$ son de la forma $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + s^2$ donde r, s son enteros de distinta paridad tales que $(r, s) = 1$ y $r > s > 0$.*

Debemos observar que si r, s son enteros cualesquiera, los correspondientes x, y, z forman una solución, pero no necesariamente primitiva.

- B) *Mostrar que en todo triángulo pitagórico: hay uno de los lados que es siempre divisible por 3 y uno por 5; el producto de los dos catetos es siempre divisible por 12 y el producto de los tres lados es siempre divisible por 60.*

Sean $x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + s^2$ los lados de un triángulo pitagórico. Si r o s son múltiplos de 3, entonces y es divisible por 3, y si ninguno lo es tendremos $r, s \not\equiv \pm 1 \pmod{3}$, por lo que $x = r^2 - s^2 \not\equiv 1 - 1 = 0 \pmod{3}$ y x es divisible por 3.

De forma parecida, si alguno de los números r o s es múltiplo de 5, también lo será y , y si ninguno lo es, entonces serán $r, s \not\equiv \pm 1, \pm 2 \pmod{5}$, y $r^2, s^2 \not\equiv 1, 4 \pmod{5}$. Puede ser $r^2 = s^2 \pmod{5}$ y tendremos x múltiplo de 5, o $r^2 \neq s^2 \pmod{5}$ y tendremos z múltiplo de 5.

El producto de los dos catetos es $2rs(r + s)(r - s)$, uno de ellos es divisible por 3 y uno de r y s es par así que el producto es divisible por 4 y por 3, es divisible por 12.

Si el producto de los tres catetos es divisible por 12 y por 5, entonces es divisible por 60.

- C) *Hallar, como propone Diofanto en el problema 18 del libro VI de su Aritmética, los triángulos pitagóricos en el que la longitud de la bisectriz de uno de los ángulos agudos es racional.*

Por ejemplo, en un triángulo rectángulo en A , la bisectriz interior del ángulo B , tenemos

$$\begin{aligned} w_b^2 &= \frac{ac(a-b+c)(a+b+c)}{(a+c)^2} = \frac{ac((a+c)^2 - b^2)}{(a+c)^2} = \frac{ac(2c^2 + 2ac)}{(a+c)^2} \\ &= \frac{2ac^2(a+c)}{(a+c)^2}, \end{aligned}$$

por lo que la bisectriz w_b será racional si y solo si $2a(a+c)$ es un cuadrado.

Si nos limitamos a las soluciones primitivas, $2a$ es par y $a+c$ es impar. Si a y $a+c$ tuvieran un divisor común, lo sería de a y c , por lo que $(2a, a+c) = 1$. Entonces, $a = 2p^2$ y $a+c = q^2$ para ciertos p, q enteros y primos relativos. Entonces $c = q^2 - p^2$ y $a-c = 3p^2 - q^2$. Teniendo en cuenta que $b^2 = (c+a)(c-a) = q^2(2p+q)(2p-q)$, será $2p+q = u^2$ y $2p-q = v^2$, con $u > v$, de donde $p = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)$ y $q = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$. Sustituyendo, resulta

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8} (u^2 + v^2)^2, \quad b = \frac{1}{2} uv(u^2 - v^2), \\ c &= \frac{1}{8} (u^2 - 2vu - v^2) (u^2 + 2vu - v^2). \end{aligned}$$

En este caso tenemos

$$w_b = \frac{|u^2 - 2vu - v^2| (u^2 + 2vu - v^2) (u^2 + v^2)}{8(u^2 - v^2)}.$$

Observación. La solución del apartado A) está tomada de Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman: *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3ª edición, John Wiley and Sons, 1972.