

Nombres pitagòrics.

A la terna (a, b, c) de nombres naturals s'anomena terna de nombres pitagòrics si compleix:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Volem trobar totes les ternes de nombres pitagòrics.

Volem resoldre l'equació $a^2 + b^2 = c^2$ en els nombres enters.

Siga $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$.

O bé resoldre l'equació $x^2 + y^2 = 1$ en els nombres racionals.

Notem que si $x = x_0$, $y = y_0$ és una solució racional de l'equació $x^2 + y^2 = 1$ i $\alpha, \alpha x_0, \alpha y_0 \in \mathbb{Z}$, Aleshores, $(\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha)$ és una terna pitagòrica

Siga $x \neq 0$, $y \neq 1, -1$.

$$x^2 = 1 - y^2$$

$$\frac{x}{1-y} = \frac{1+y}{x} \quad (1)$$

Siguen $u = \frac{x}{1-y}$, $v = \frac{1+y}{x}$

Aïllant x, y en el sistema format per les equacions anteriors:

$$x = \frac{2u}{uv+1}, y = \frac{uv-1}{uv+1} \quad (2)$$

Substituint les expressions (2) en l'expressió (1):

$$\frac{\frac{2u}{uv+1}}{1 - \frac{uv-1}{uv+1}} = \frac{1 + \frac{uv-1}{uv+1}}{\frac{2u}{uv+1}}. \text{ Simplificant:}$$

$$u = v \quad (3)$$

D'aquesta manera si $x = x_0$, $y = y_0$ és una solució de l'equació (1) aleshores,

$$u_0 = \frac{x_0}{1-y_0}, v_0 = \frac{1+y_0}{x_0} \text{ és una solució de (3) i viceversa.}$$

Siga $u = v = t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, podem suposar que la fracció és irreductible, $\text{mcd}(m, n) = 1$

$$\text{Aleshores, } \begin{cases} x = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \\ y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \end{cases}.$$

Aleshores aquestes són les solucions racionals de (1).

Aleshores, les ternes pitagòriques són de la forma:

$$(\alpha 2mn, \alpha(m^2 - n^2), \alpha(m^2 + n^2)). \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Vegem que en una terna pitagòrica algun dels termes és múltiple de 2.

Suposem que c no és múltiple de 2. Aleshores, $c^2 \equiv 1 \pmod{2}$

Si a i b no foren múltiples de 2, $a^2 \equiv 1 \pmod{2}$, $b^2 \equiv 1 \pmod{2}$.

$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{2}$. La qual cosa és absurda.

Per tant, a, b o c és múltiple de 2.

Vegem que en una terna pitagòrica algun dels termes és múltiple de 3.

Suposem que c no és múltiple de 3.

Aleshores, $c^2 \equiv 1 \pmod{3}$

Si a i b no foren múltiples de 3, $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{3}$. La qual cosa és absurda.

Per tant, a, b o c és múltiple de 3.

Vegem que en una terna pitagòrica algun dels termes és múltiple de 5.

Suposem que c no és múltiple de 5.

Aleshores, $c^2 \equiv 1 \pmod{5}$ o bé $c^2 \equiv -1 \pmod{5}$

Si a i b no foren múltiples de 5, $a^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$, $b^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{5}$, o bé $c^2 = a^2 + b^2 \equiv -2 \pmod{5}$, o bé $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{5}$.

La qual cosa és absurda.

Per tant, a, b o c és múltiple de 5.

Vegem que el producte dels catets és divisible per 12

Suposem que b no és múltiple de 2 i a no és múltiple de 2. Aleshores c és múltiple de 2.

Aleshores, $c^2 \equiv 0 \pmod{4}$

Aleshores, $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$,

$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$ la qual cosa és absurda.

Suposem que b és múltiple de 2 i a no és múltiple de 2. Aleshores c no és múltiple de 2.

Aleshores, $c^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Suposem que b no és múltiple de 4, $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$ la qual cosa és absurda.

Aleshores, a o b són múltiples de 4.

Suposem que a i b no són múltiples de 3. Aleshores, c és múltiple de 3

$c^2 \equiv 0 \pmod{4}$

Aleshores, $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$,

$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{3}$ la qual cosa és absurda.

Aleshores, a o b són múltiples de 3.

Per tant, el producte ab és múltiple de 12.

Trivialment si ab és múltiple de 12, i a més a més, algun de a, b, o c és múltiple de 5, aleshores, abc és múltiple de 60.

Problema de Diofanto.

De tots els triangles pitagòrics determineu aquell que la bisectriu d'un dels angles aguts siga un nombre racional.

Considerem el triangle Pitagòrica $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$:

$$a = 2mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2, m, n \in \mathbb{N}, m > n.$$

Siga $p = \overline{AD}$ bisectriu del triangle.

Siga $\overline{CD} = x$. Siga

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{m^2 - n^2}{x} = \frac{m^2 + n^2}{2mn - x}$$

$$\frac{m^2 - n^2}{x} = \frac{m}{n}, \text{ aleshores, } x = \frac{n}{m}(m^2 - n^2).$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADC$:

$$x^2 + (m^2 - n^2)^2 = p^2:$$

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 (m^2 - n^2)^2 + (m^2 - n^2)^2 = p^2$$

$$\left(\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1\right) (m^2 - n^2)^2 = p^2$$

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m}\right)^2 (m^2 + n^2) = p^2$$

p és un nombre racional si $m^2 + n^2$ és un quadrat perfecte:

$$m^2 + n^2 = r^2, \text{ on } r \in \mathbb{N}.$$

Aquesta equació té solució natural si:

$$\begin{cases} m = 2de \\ n = d^2 - e^2, \quad d, e \in \mathbb{N}, d > e. \\ r = d^2 + e^2 \end{cases}$$

Aleshores:

$$\begin{cases} a = 2mn = 2de(d^2 - e^2) \\ b = m^2 - n^2 = (2de)^2 - (d^2 - e^2)^2 \\ c = m^2 + n^2 = (2de)^2 + (d^2 - e^2)^2 = (d^2 + e^2)^2 \end{cases}, \quad d, e \in \mathbb{N}, d > e.$$

Nombres pitagòrics primitius menors de 1000.

Font: Paul Yiu "Number Theory 2". 2007

<i>m</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
2	1	3	4	5	3	2	5	12	13	4	1	15	8	17	4	3	7	24	25
5	2	21	20	29	5	4	9	40	41	6	1	35	12	37	6	5	11	60	61
7	2	45	28	53	7	4	33	56	65	7	6	13	84	85	8	1	63	16	65
8	3	55	48	73	8	5	39	80	89	8	7	15	112	113	9	2	77	36	85
9	4	65	72	97	9	8	17	144	145	10	1	99	20	101	10	3	91	60	109
10	7	51	140	149	10	9	19	180	181	11	2	117	44	125	11	4	105	88	137
11	6	85	132	157	11	8	57	176	185	11	10	21	220	221	12	1	143	24	145
12	5	119	120	169	12	7	95	168	193	12	11	23	264	265	13	2	165	52	173
13	4	153	104	185	13	6	133	156	205	13	8	105	208	233	13	10	69	260	269
13	12	25	312	313	14	1	195	28	197	14	3	187	84	205	14	5	171	140	221
14	9	115	252	277	14	11	75	308	317	14	13	27	364	365	15	2	221	60	229
15	4	209	120	241	15	8	161	240	289	15	14	29	420	421	16	1	255	32	257
16	3	247	96	265	16	5	231	160	281	16	7	207	224	305	16	9	175	288	337
16	11	135	352	377	16	13	87	416	425	16	15	31	480	481	17	2	285	68	293
17	4	273	136	305	17	6	253	204	325	17	8	225	272	353	17	10	189	340	389
17	12	145	408	433	17	14	93	476	485	17	16	33	544	545	18	1	323	36	325
18	5	299	180	349	18	7	275	252	373	18	11	203	396	445	18	13	155	468	493
18	17	35	612	613	19	2	357	76	365	19	4	345	152	377	19	6	325	228	397
19	8	297	304	425	19	10	261	380	461	19	12	217	456	505	19	14	165	532	557
19	16	105	608	617	19	18	37	684	685	20	1	399	40	401	20	3	391	120	409
20	7	351	280	449	20	9	319	360	481	20	11	279	440	521	20	13	231	520	569
20	17	111	680	689	20	19	39	760	761	21	2	437	84	445	21	4	425	168	457
21	8	377	336	505	21	10	341	420	541	21	16	185	672	697	21	20	41	840	841
22	1	483	44	485	22	3	475	132	493	22	5	459	220	509	22	7	435	308	533
22	9	403	396	565	22	13	315	572	653	22	15	259	660	709	22	17	195	748	773
22	19	123	836	845	22	21	43	924	925	23	2	525	92	533	23	4	513	184	545
23	6	493	276	565	23	8	465	368	593	23	10	429	460	629	23	12	385	552	673
23	14	333	644	725	23	16	273	736	785	23	18	205	828	853	23	20	129	920	929
24	1	575	48	577	24	5	551	240	601	24	7	527	336	625	24	11	455	528	697
24	13	407	624	745	24	17	287	816	865	24	19	215	912	937	25	2	621	100	629
25	4	609	200	641	25	6	589	300	661	25	8	561	400	689	25	12	481	600	769
25	14	429	700	821	25	16	369	800	881	25	18	301	900	949	26	1	675	52	677
26	3	667	156	685	26	5	651	260	701	26	7	627	364	725	26	9	595	468	757
26	11	555	572	797	26	15	451	780	901	26	17	387	884	965	27	2	725	108	733
27	4	713	216	745	27	8	665	432	793	27	10	629	540	829	27	14	533	756	925
27	16	473	864	985	28	1	783	56	785	28	3	775	168	793	28	5	759	280	809
28	9	703	504	865	28	11	663	616	905	28	13	615	728	953	29	2	837	116	845
29	4	825	232	857	29	6	805	348	877	29	8	777	464	905	29	10	741	580	941
29	12	697	696	985	30	1	899	60	901	30	7	851	420	949	31	2	957	124	965
31	4	945	248	977	31	6	925	372	997										

Ternes de nombres pitagòrics primitius $\text{mcd}(a,b,c)=1$

$a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, m, n de distinta paritat.