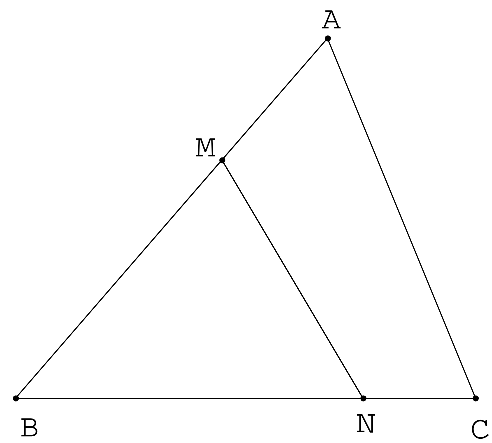
Problema 403 de *triánguloscabri*. *Demostrar que si una recta divide a un triángulo ABC en dos polígonos del mismo perímetro y de la misma área, entonces debe pasar por el incentro I de ABC. Demostrar también, sin necesidad de construcción geométrica, la existencia de tal recta.*

(Este problema es una nueva visión del problema 138 de la quincena del 1 al 15 de febrero de 2004, con una profundización.)

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán



Sea $M = (t : 1-t : 0)$ un punto del segmento AB. Habrá un único punto $N = (0 : 1-x : x)$ sobre BC tal que el área con signo del triángulo MBC sea igual a la mitad del área del triángulo ABC. De la fórmula

$$(BMC) = \begin{vmatrix} t & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & x \end{vmatrix} (ABC) = tx(ABC)$$

resulta que debe ser $tx = \frac{1}{2}$ y $N = (0 : 2t-1 : 1)$. Entonces la recta MN que biseca el área tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 2t-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-t)x - ty + (2t^2-t)z = 0.$$

Esta recta contendrá al incentro $I = (a : b : c)$ si y solo si

$$(1-t)a - tb + (2t^2-t)c = 0. \qquad (1)$$

Ahora, de las relaciones $AM : MB = (1-t) : t$ y $AM + MB = c$ es $MB = ct$, y de las relaciones $BN : NC = 1 : (2t-1)$ y $BN + NC = a$ es $BN = a/(2t-2)$. Entonces, que $MB + BN$ sea el semiperímetro de ABC, equivale a

$$\begin{aligned} ct + \frac{a}{2t} = \frac{a+b+c}{2} &\Leftrightarrow 2t^2c + a = t(a+b+c), \\ \Leftrightarrow &(1-t)a - tb + (2t^2 - t)c = 0. \end{aligned}$$

que es la misma expresión que (1).

Para razonar que la recta del enunciado siempre existe usemos un argumento de continuidad. Observemos que para $t = \frac{1}{2}$ resulta que M es el punto medio de AB y $N = C$, por lo que $MB + MC = \frac{c}{2} + a$, mientras que para $t = 1$, resulta que $M = A$ y N es el punto medio de BC, por lo que $MB + BC = c + \frac{a}{2}$. Entonces estará garantizado que exista un t para el que $MB + MC$ sea igual al semiperímetro, siempre que $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ quede entre $\frac{a}{2} + c$ y $\frac{c}{2} + a$ lo cual ocurrirá siempre que b sea un valor intermedio entre a y c, condición que podemos suponer sin pérdida de generalidad.