Problema 404 de *triánguloscabri*. *Si p, r y R son el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito al triángulo ABC, demostrar que*

$$2p^2R - 2r^3 > 0.$$

¿ Se alcanza la anulación?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Usaremos el siguiente

Lema. *En un triángulo con lados a, b, c se cumple la desigualdad*

$$8(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant abc.$$

La igualdad se cumple si y solo si el triángulo es equilátero.

A. Padoa. Period. Mat. (4) 5 (1925), 80-85.

Demostración. Tenemos

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2} \leqslant a, \quad \sqrt{b^2-(c-a)^2} \leqslant b, \quad \sqrt{c^2-(a-b)^2} \leqslant c,$$

de donde

$$\sqrt{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2} \leqslant abc.$$

Como $b+c-a$, $c+a-b$ y $a+b-c$ son números positivos, resulta que

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc.$$

Ahora, para resolver nuestro problema, partimos de las fórmulas

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

Entonces la desigualdad propuesta es equivalente a las siguientes:

$$\begin{aligned}
&p^2R > r^3,\\
&p^4R^2 > (r^2)^3,\\
&p^4 \cdot \frac{a^2b^2c^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} > \frac{(p-a)^3(p-b)^3(p-c)^3}{p^3},\\
&p^6a^2b^2c^2 > 16(p-a)^4(p-b)^4(p-c)^4\\
&p^3abc > 4(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2.
\end{aligned}$$

Si usamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$p^3 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant \frac{27}{8}abc,$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $a = b = c$. Entonces,

$$\begin{aligned} p^3abc \geqslant \frac{27}{8}a^2b^2c^2 \geqslant & \frac{27}{8}\left(64(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2\right) \\ =& 216(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2. \\ >& 4(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2, \end{aligned}$$

no cumpliéndose la desigualdad en ningún caso.