

Problema 405 de *triángulos cabri*. Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ cumpliendo

1. los ángulos B y B' son iguales y la suma de los ángulos A y A' es igual dos rectos, o
2. los ángulos A y A' son mayores o iguales que un recto,

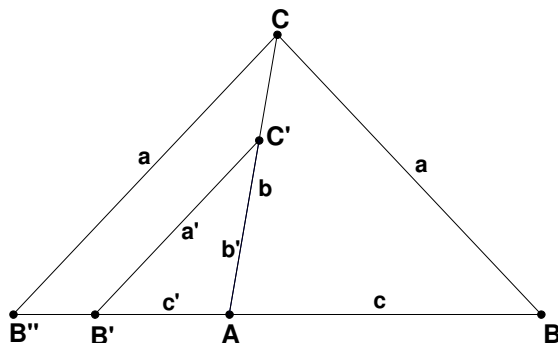
probar que entre sus lados se verifica la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} \leq \sqrt{2aa'}.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Supongamos primero que los triángulos ABC y $A'B'C'$ cumplen la primera condición. Tracemos por C' la paralela a $C'B'$ cortando a la recta AB en B'' y formando el triángulo isósceles $CB''B$.



En este triángulo tenemos

$$BB'' = 2a \cos B = 2a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c},$$

de donde

$$B''A = BB'' - AB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c} - c = \frac{a^2 - b^2}{c}.$$

Ahora, usando los triángulos semejantes $AB''C$ y $AB'C'$, tenemos que

$$\frac{c'}{B''A} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}.$$

A partir de aquí,

$$\frac{\frac{c'}{a^2 - b^2}}{c} = \frac{b'}{b} \Rightarrow bcc' = b'a^2 - b'b^2 \Rightarrow bcc' = \left(\frac{ba'}{a}\right) a^2 - b'b^2$$

$$\Rightarrow bcc' = baa' - b^2b' \Rightarrow \boxed{bb' + cc' = aa'}.$$

Ahora usamos la

Desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática. Si x e y son números no negativos se cumple que

$$\frac{x + y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

La igualdad se cumple si y solo si $x = y$.

Demostración. Basta tener en cuenta la identidad

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}(x - y)^2.$$

Entonces será

$$\frac{\sqrt{bb'} + \sqrt{cc'}}{2} \leq \sqrt{\frac{bb' + cc'}{2}} = \sqrt{\frac{aa'}{2}} \Rightarrow \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} \leq \sqrt{2aa'}.$$

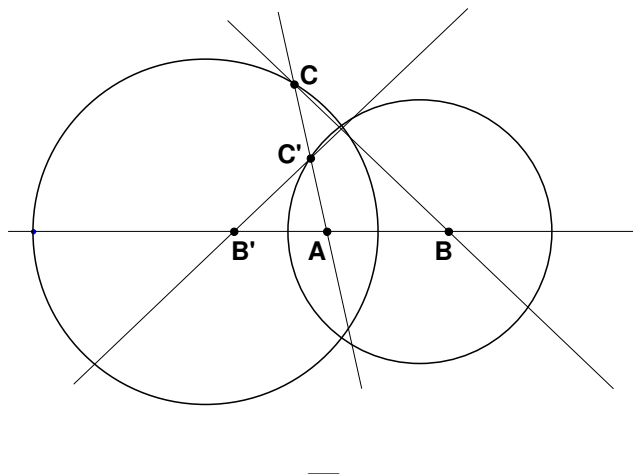
La igualdad se cumplirá cuando $bb' = cc'$. Como también es $aa' = bb' + cc'$, resulta $aa' = 2bb'$. Entonces, teniendo en cuenta las relaciones $B = B'$ y $A + A' = 180^\circ$ y usando el teorema de los senos, resulta

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{a'}{\sin A} = \frac{b'}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'} = 2,$$

es decir, $\sin A = \sqrt{2} \sin B$, y por lo tanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \sqrt{2}.$$

Geométricamente, los puntos C y C' deberán estar en las circunferencias de Apolonio Γ y Γ' formadas por los puntos tales que $CB/CA = \sqrt{2}$ y $C'B'/C'A' = \sqrt{2}$ respectivamente. Para visualizar todas estas soluciones situamos el punto $A = A'$ sobre una recta, los puntos B y B' también sobre esa recta, cada uno en una de las semirrectas determinadas por A , y trazamos las mencionadas circunferencias de Apolonio. Para cualquier punto C sobre Γ , la recta CB' determina el vértice C' sobre la circunferencia Γ' .



Supongamos ahora que $A \geq 90^\circ$ y $A' \geq 90^\circ$. En este caso, usaremos la

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ son dos vectores se verifica

$$u_1v_1 + u_2v_2 \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

cumpléndose la desigualdad si y solo si los vectores son proporcionales.

Observemos antes que si aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática en un triángulo ABC con $A \geq 90^\circ$ tendremos

$$\frac{b+c}{2} \leq \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow b+c \leq \sqrt{2}a,$$

cumpléndose la igualdad si y solo si $A = 90^\circ$ y $b = c$.

Ahora, si aplicamos esta desigualdad a los vectores $(\sqrt{b}, \sqrt{c})$ y $(\sqrt{b'}, \sqrt{c'})$ tendremos

$$\sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{b}\sqrt{b'} + \sqrt{c}\sqrt{c'} \leq \sqrt{b+c}\sqrt{b'+c'} \leq \sqrt{\sqrt{2}a}\sqrt{\sqrt{2}a'} = \sqrt{2aa'},$$

cumpléndose la igualdad si y solo si los dos triángulos son rectángulos isósceles ($b = c$ y $b' = c'$).