Problema 407 de *triánguloscabri*. *Sea un triángulo acutángulo ABC y sea P un punto interior al mismo. Sean los ángulos $\alpha = \angle APB$, $\beta = \angle BPC$, $\gamma = \angle CPA$. Caracterizar el punto P de manera que la suma $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ sea mínima.*

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Llegaremos a la solución a través de algunas identidades y desigualdades.

Lema 1. *Si A, B, C son los ángulos de un triángulo, entonces*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

Demostración. Usando el teorema del coseno, de $C = 180° - (A + B)$, tenemos

$$\cos C = -\cos(A + B) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A \cos B$$

y elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B =&(\cos C + \cos A\cos B)^2,\\
(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B) =& \cos^2 C + \cos^2 A\cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C,\\
1 - \cos^2 A - \cos^2 B =& \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C,\\
\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C =& 1 - 2\cos A\cos B\cos C.
\end{aligned}$$

Lema 2. *Si A, B, C son los ángulos de un triángulo, entonces*

$$\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}.$$

Demostración. Llamemos $\lambda = 1 - 8\cos A\cos B\cos C$. La fórmula que transforma sumas en productos nos da

$$\lambda = 1 - 8\cos A\cos B\cos C = 1 - 4\cos A\left(\cos(B - C) + \cos(B + C)\right).$$

Como $\cos(B + C) = \cos(180° - A) = -\cos A$, resulta que

$$\begin{aligned}
\lambda =& \operatorname{sen}^2(B - C) + \cos^2(B - C) - 4\cos A\cos(B - C) + 4\cos^2 A =\\
=& \operatorname{sen}^2(B - C) + (\cos(B - C) - 2\cos A)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Lema 3. *Si A, B, C son los ángulos de un triángulo,*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geqslant \frac{3}{4}.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de los lemas 1 y 2.

Lema 4. *Si los ángulos positivos α, β y γ suman 360° entonces,*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Demostración. Los ángulos positivos $A = \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ y $C = \frac{\gamma}{2}$ suman 180°, por lo que, usando la fórmula del ángulo doble,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \\
&= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - (\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C) \\
&= 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 3 \\
&\geqslant 2\left(\frac{3}{4}\right) - 3 = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Solución del problema 407. Observemos que en el Lema 2 la igualdad se da cuando $B = C$ y $\cos A = \frac{1}{2}$, es decir, cuando el triángulo es equilátero. Por tanto, en el Lema 4 la igualdad se cumplirá cuando los tres ángulos α, β y γ sean iguales a 120°, por lo que el punto buscado es el punto de Fermat del triángulo ABC (ver el problema 13 de esta revista):