Lugares geométricos
de triángulos inscritos en un círculo

Problema 409 de *triánguloscabri*. *Sea un círculo Γ de centro O. Sobre su circunferencia, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo ABC inscrito en el círculo Γ.*

1. *Si el vértice A recorre la circunferencia de G, hallar el lugar geométrico del ortocentro H del triángulo ABC.*
2. *Sean A', B', C' las intersecciones de la circunferencia de Γ respectivamente con las bisectrices internas de los ángulos A, B, C. Si el vértice A recorre la circunferencia de Γ, hallar el lugar geométrico del ortocentro H' del triángulo $A'B'C'$.*

Propuesto por José María Pedret.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Usaremos los números complejos:

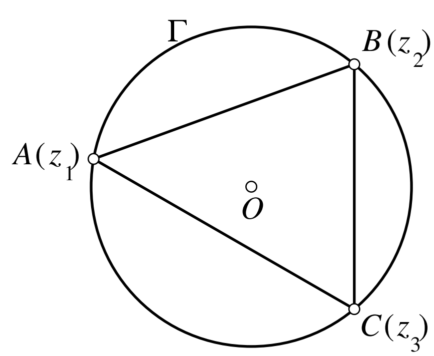

Figura 1

Sin pérdida de generalidad supondremos que la circunferencia de Γ es la circunferencia unidad, es decir, centrada en el origen y tiene radio unidad. Cada punto de γ lo podemos asociar entonces a un complejo de módulo 1, su afijo, y éste a un ángulo entre 0 y 2π.

Si z_1, z_2, z_3 son los afijos de A, B y C, el afijo del baricentro G es número complejo $g = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$. Teniendo en cuenta la relación $GH : HO = 2 : 1$, es decir $OH = 3 \cdot OG$, y que O es el origen, el afijo del ortocentro H será el número

$$h = 3g = z_1 + z_2 + z_3. \tag{1}$$

1. Podemos suponer que los vértices B y C fijos del triángulo ABC corresponden a los números complejos w y $\bar{w}$ (conjugado de w), y al vértice variable A le corresponde un número complejo z sobre la circunferencia unidad. Aplicando (1), el ortocentro H viene dado por el número complejo $h = w + \bar{w} + z$. Teniendo en cuenta que $w + \bar{w}$ es constante, h es el resultado de aplicar a z una traslación de vector $w + \bar{w}$, por lo que el lugar geométrico de h será una circunferencia igual a Γ.

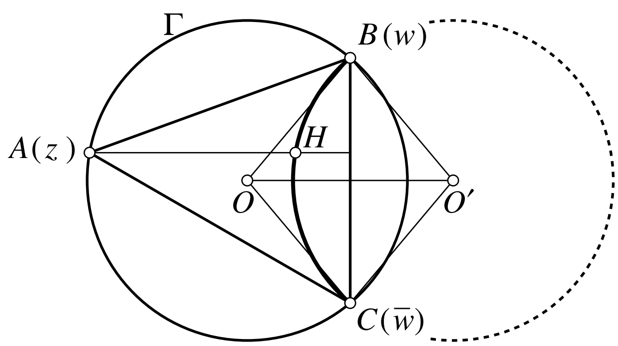

Figura 2

El centro O' de la circunferencia resultante, cuyo afijo es $w + \bar{w}$, es el punto simétrico de O respecto de BC.

2. Precisando un poco más, sean los números complejos

$$\begin{aligned} z &= \cos t + i \operatorname{sen} t, \\ w &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \\ \bar{w} &= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

para cierto θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ y para t variable $(\theta < t < 2\pi - \theta)$, los afijos de A, B y C, respectivamente.

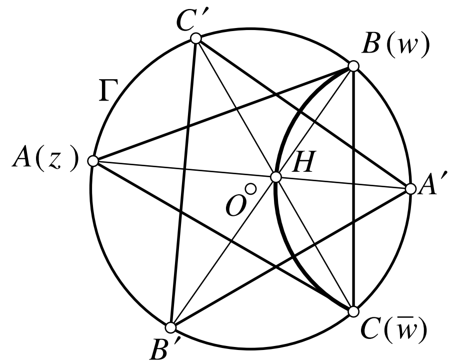

Figura 3

Entonces tendremos que los afijos α, β y γ de A', B' y C' son

$$\begin{aligned}
\alpha =&1,\\
\beta =&\cos\left(\frac{t+2\pi-\theta}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{t+2\pi-\theta}{2}\right)\\
=&-\cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right)-i\operatorname{sen}\left(\frac{t-\theta}{2}\right),\\
\gamma =&\cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{t+\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando ahora la fórmula (1), el afijo del ortocentro H' de $A'B'C'$ será

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta+\gamma =&1+\cos\left(\frac{t+\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\\
&+i\left(\operatorname{sen}\left(\frac{t+\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{t-\theta}{2}\right)\right)\\
=&1-2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}+i\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

En coordenadas cartesianas podemos expresar:

$$H=(1,0)+2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(-\operatorname{sen}\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2}\right),$$

lo cual quiere decir que H está sobre un arco de circunferencia con centro en $A'=(1,0)$, que es fijo, y radio $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=A'B$, que teniendo en cuenta los valores extremos de $t=\theta$ y $t=2\pi-\theta$ es arco que aparece resaltado en la figura 3.

Observando la figura 2 vemos que el ortocentro H del triángulo $A'B'C'$ es el incentro del triángulo ABC, por lo que hemos llegado a un resultado conocido:

Lugar del incentro. *El lugar geométrico de los incentros de los triángulos ABC y con B y C fijos y A variando en una arco de circunferencia es un arco de otra circunferencia que pasa por B y C y está centrada en el punto medio del arco BC (el que no contiene a A).*

Ahora, supongamos como en la figura 4, que A varía en el otro arco determinado por B y C, haciendo que el triángulo ABC sea obtuso.

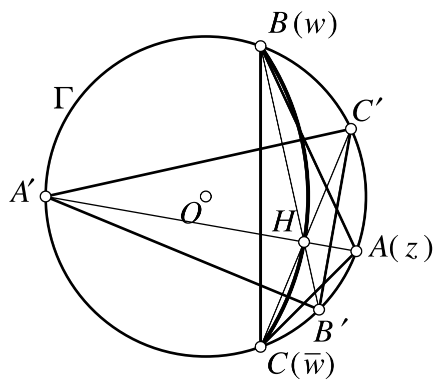

Figura 4

Los cálculos en este caso son prácticamente iguales, con la diferencia de que ahora en las fórmulas (2) tenemos $2\pi - \theta < t < \theta$, y de que ahora el afijo de A' es $\alpha = -1$, por lo que, dejando los detalles al lector, decimos que el lugar geométrico sería el arco de circunferencia centrada en $A' = (-1, 0)$, que es fijo, y radio $A'B = A'C$ que va desde C hasta B en el sentido positivo de medición de ángulos.

Como puede verse en la figura, esta situación también es un caso particular de lugar de incentro enunciada anteriormente.