

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 411. (propuesto por José-María Pedret) Sea un círculo Γ de centro O .

- ① Sobre su circunferencia, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo PBC inscrito en el círculo Γ . Si el vértice A recorre la circunferencia de Γ , hallar el lugar geométrico del baricentro G_{PBC} del triángulo PBC .
- ② Sobre su circunferencia, se toman dos puntos fijos B y C y un punto variable P . Se traza la altura h_B desde el vértice B , que corta al lado CP en el punto D , y la altura h_C desde el vértice C , que corta al lado PB en el punto E . Se traza la recta DE y se determina sobre ella un punto F tal que $\frac{EF}{FD} = k \in \mathbb{R}$. Hallar el lugar geométrico que describe el punto F .

Solución:

- ① Si A es uno de los puntos de la circunferencia tales que el triángulo ABC es isósceles, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como $b = c$, entonces, la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$\Gamma \equiv b^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

Además, para cada punto P , distinto de B y de C , situado sobre esta circunferencia si $Q = (0 : 1 - t : t)$ ($0 \neq t \neq 1$) es el punto de intersección entre la recta BC y la recta AP , como:

$$AQ \equiv ty + (t - 1)z = 0$$

resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, obtenemos que $P = (a^2t(t - 1) : b^2(1 - t) : b^2t)$, por lo que:

$$G_{PBC} = (a^2t(t - 1) : b^2(2 - t) + a^2t(t - 1) : a^2t(t - 1) + b^2(1 + t))$$

Eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a^2t(t - 1)\theta \\ y = [b^2(2 - t) + a^2t(t - 1)]\theta \quad (\theta \in \mathbb{R}^*) \\ z = [a^2t(t - 1) + b^2(1 + t)]\theta \end{cases}$$

resulta que el punto G_{PBC} debe estar situado sobre la circunferencia de ecuación:

$$b^2xy + b^2xz + a^2yz - \left[\frac{(6b^2 - a^2)x}{9} + \frac{2a^2y}{9} + \frac{2a^2z}{9} \right] (x + y + z) = 0$$

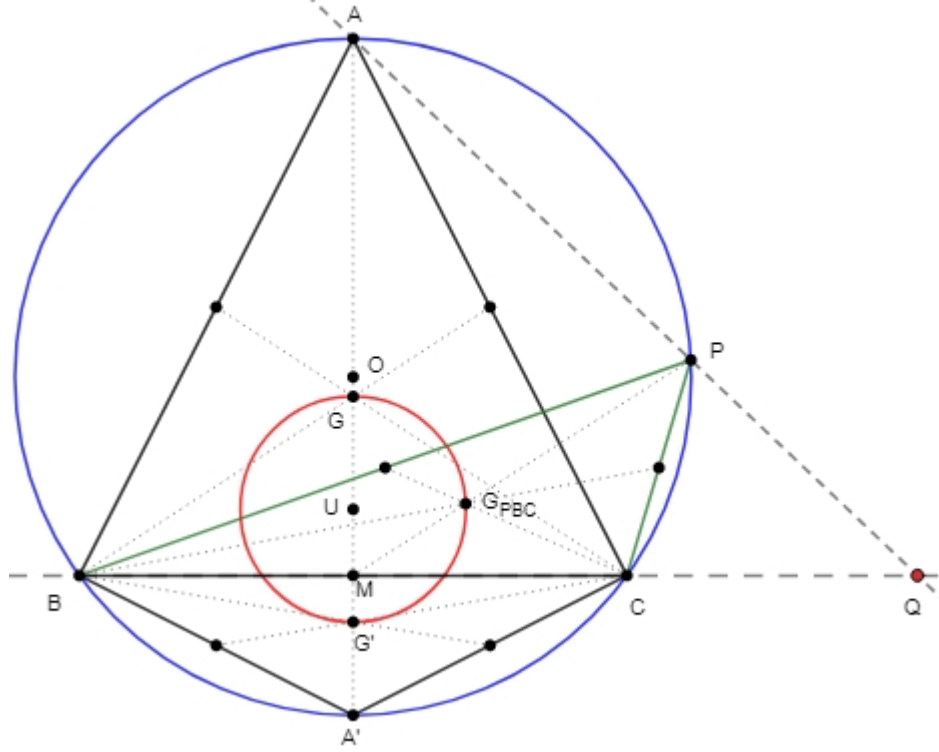
cuyo centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto $U = (-a^2 + 2b^2 : -a^2 + 5b^2 : -a^2 + 5b^2)$, situado sobre la mediana correspondiente al vértice A (mediatriz del segmento BC), y cuyo radio es:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{b^2(-a^2 + 5b^2)^2 + 2S_A(-a^2 + 5b^2)^2 + b^2(-a^2 + 5b^2)^2}{(12b^2 - 3a^2)^2} - \frac{6b^2 - a^2}{9}} \\ &= \frac{b^2}{3\sqrt{4b^2 - a^2}} \\ &= \frac{ab^2}{6S} = \frac{R}{3} \end{aligned}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

siendo R el radio de Γ . Finalmente, como el baricentro G del triángulo ABC y el baricentro G' del triángulo $A'BC$ han de estar situados sobre esta circunferencia y ambos están alineados con su centro (por estar situados los tres sobre la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC , entonces, el centro U de esta circunferencia es el punto medio entre los puntos G y G').



- ② Si A es uno de los puntos de la circunferencia tales que el triángulo ABC es isósceles, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como $b = c$, entonces, la ecuación de su circunferencia circunscrita es:

$$\Gamma \equiv b^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

Además, para cada punto P , distinto de B y de C , situado sobre esta circunferencia si $Q = (0 : 1 - t : t)$ ($0 \neq t \neq 1$) es el punto de intersección entre la recta BC y la recta AP , como:

$$AQ \equiv ty + (t - 1)z = 0$$

resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, obtenemos que $P = (a^2t(t - 1) : b^2(1 - t) : b^2t)$, por lo que:

$$\begin{cases} PB \equiv 0 = (b^2 : 0 : a^2(1 - t)) \\ CP \equiv 0 = (b^2 : a^2t : 0) \end{cases}$$

y, por tanto:

$$\begin{cases} D = (a^2t(-2b^2 + a^2t), 2b^4 - a^2b^2t, a^2t(-a^2t + b^2(1 + 2t))) \\ E = (a^2(2b^2 + a^2(-1 + t))(-1 + t), -a^2(b^2(3 - 2t) + a^2(-1 + t))(-1 + t), 2b^4 + a^2b^2(-1 + t)) \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

Vamos a distinguir dos casos:

- ☺ Si $k \neq -1$, tomando D y E con el mismo peso, resulta que $F = kD + E$ (omitiéndose las coordenadas de este punto por ser demasiado extensas) y, si M es el punto medio del segmento BC , como:

$$MF^2 = \frac{a^2(b^4 - a^4k + 4a^2b^2k - 2b^4k + b^4k^2)}{4b^2(1+k)^2}$$

entonces, la distancia MF es constante, por lo que el punto F ha de estar situado sobre la circunferencia con centro M y radio $\frac{a\sqrt{b^4 - a^4k + 4a^2b^2k - 2b^4k + b^4k^2}}{2b|1+k|}$. En el gráfico que aparece al final, se representa gráficamente el caso $k = 1$, para el que el punto F es el punto medio del segmento DE .

- ☹ Si $k = -1$, entonces, el punto $F = (a^2(-1+2t) : -(a+b-at)(-a+b+at) : (b-at)(b+at))$ está situado sobre la recta del infinito, ya que la suma de sus tres coordenadas es nula.

