

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 414. (Shariguin. “Problemas de Geometría”. Planimetría”. Ed. Mir. Moscú. 1986. problema II106. página 88.) Dado un triángulo ABC , probar que el radio de su incírculo mixtilinear correspondiente al vértice A es igual al diámetro de su incírculo si y sólo si el triángulo es rectángulo en A .

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como, según Lema de Verriér, la recta que pasa por el incentro $I = (a : b : c)$ del triángulo ABC y es perpendicular a la bisectriz interior (y, por tanto, paralela a la bisectriz exterior) correspondiente al vértice A :

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ c-b & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2bcx - c(a-b+c)y - b(a+b-c)z$$

corta a los lados AB y AC en sus puntos de tangencia con el incírculo mixtilinear, entonces, las coordenadas de dichos puntos son:

$$\begin{cases} E = (a+b-c : 0 : 2c) \\ F = (a-b+c : 2b : 0) \end{cases}$$

Además, como la ecuación del incírculo mixtilinear correspondiente al vértice A es de la forma:

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy - (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0 \quad (u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos E y F y sea tangente a la recta AC en el punto E (o a la recta AB en el punto F , da igual), obtenemos que:

$$\begin{cases} u = \frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2} \\ v = \frac{c^2(a-b+c)^2}{(a+b+c)^2} \\ w = \frac{b^2(a+b-c)^2}{(a+b+c)^2} \end{cases}$$

por lo que la ecuación de esta circunferencia es:

$$(a+b+c)^2(a^2yz + b^2xz + c^2xy) - [4b^2c^2x + c^2(a-b+c)^2y + b^2(a+b-c)^2z](x+y+z) = 0$$

siendo su centro (conjugado de la recta del infinito) el punto:

$$J = (-a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + ab^2 - a^2c - b^2c + ac^2 - bc^2 + 2abc : 4b^2c : 4bc^2)$$

y el cuadrado de su radio:

$$\rho^2 = JE^2 = \frac{4b^2c^2(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a+b+c)^3}$$

TRIÁNGULOS CABRI

Finalmente, si llamamos r al inradio del triángulo ABC , como:

$$\begin{aligned}\rho^2 - 4r^2 &= \frac{4b^2c^2(a-b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a+b+c)^3} - \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a^2+b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2+4bc)}{(-a+b+c)(a+b+c)^3} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a^2+b^2+c^2)[(a+b+c)(-a+b+c)+2bc]}{(-a+b+c)(a+b+c)^3}\end{aligned}$$

resulta que:

$$\rho = 2r \Leftrightarrow \rho^2 = 4r^2 \Leftrightarrow -a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow \angle BAC = \frac{\pi}{2}$$