TRIÁNGULOS CABRI

Problema 416. (propuesto por José-María Pedret) En un triángulo ABC con circuncentro O, se sabe que la base AB es fija y que el punto medio del segmento CO está situado en la recta AB. Hallar el lugar geométrico que describe el vértice C.

Solución:

Si C es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $O=(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, entonces, el punto medio del segmento CO es:

$$M=(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C : -a^4+2a^2b^2-b^4+3a^2c^2+3b^2c^2-2c^4)$$

por lo que, imponiendo que este punto esté situado sobre la recta AB, obtenemos que:

$$-a^4+2a^2b^2-b^4+3a^2c^2+3b^2c^2-2c^4=0$$

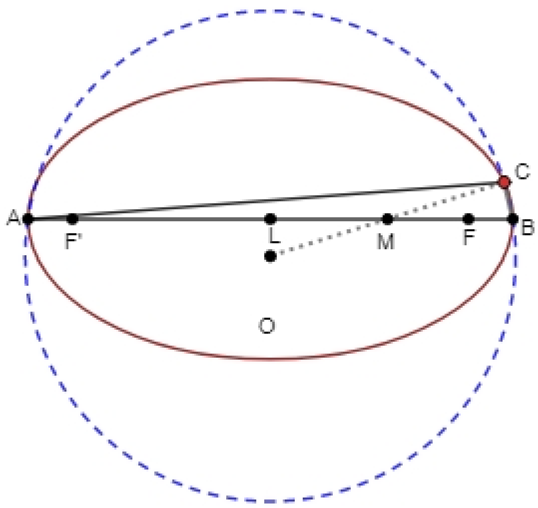
Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio L del segmento AB y eje de abscisas en la recta AB y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento AB, si $c=(x,y)\ (y\neq 0)$, como:

$$\begin{cases} B=(1,0) \\ A=(-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=BC=2 \\ a=AC=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ b=AB=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$x^2+3y^2=1$$

por lo que el lugar geométrico pedido es la elipse cuyo eje focal es el segmento AB y cuyos focos están situados a una distancia igual a $\dfrac{AB}{\sqrt{6}}$ del punto L, exceptuando sus puntos de intersección con la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.



Miguel-Ángel Pérez García Ortega