TRIÁNGULOS CABRI

Problema 417. (Vicario, V, (2007)) Demostrar que, si en un triángulo ABC, el triángulo formado por los pies de sus bisectrices interiores es rectángulo si y sólo si dicho triángulo tiene un ángulo de 120º.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como los pies de sus bisectrices interiores son:

$$\begin{cases} D=(0:b:c) \\ E=(a:0:c) \\ F=(a:b:0) \end{cases}$$

considerando (da igual) el ángulo $\triangle EDF$, como:

$$\begin{cases} DE \equiv 0 = bcx + acy - abz \\ DE \equiv 0 = bcx - acy + abz \end{cases}$$

entonces:

$$S\cot(\triangle EDF) = \frac{-S_A a^2(b+c)^2 + S_B b^2(c-a)(c+a) - S_C c^2(a-b)(a+b)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & -ab \\ bc & -ac & ab \end{vmatrix}} = \frac{a(-a^2+b^2+c^2+bc)}{2(b+c)}$$

por lo que:

$$\triangle EDF = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cot(\triangle EDF) = 0 \Leftrightarrow -a^2+b^2+c^2+bc = 0 \Leftrightarrow \cos(\triangle BAC) = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \triangle BAC = \frac{2\pi}{3}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega