

Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, inscrito en una circunferencia Γ de centro O , y H su ortocentro. El lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulos inscritos en Γ , con ortocentro H , es la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 418.

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por José María Pedret. Ingeniero Naval. (Esplugas de Llobregat, Barcelona), con el siguiente enunciado:

En un plano cualquiera, se dan:

— *un círculo Γ de centro O ,*

— *un punto fijo H .*

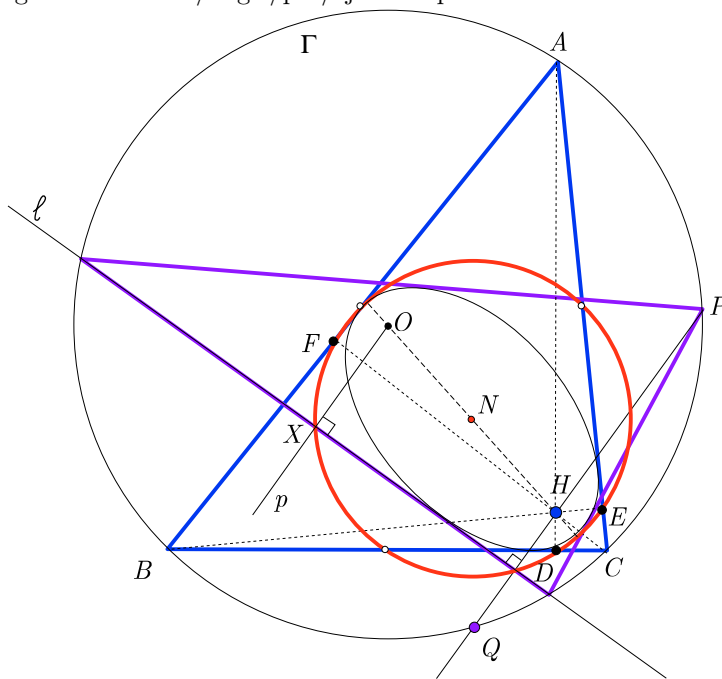
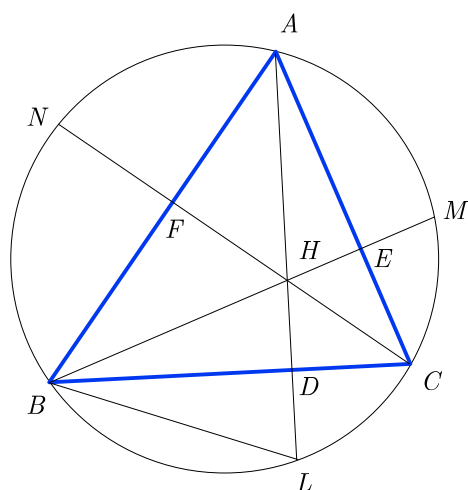
En Γ se inscriben triángulos variables $\widehat{ABC}$, cuyo ortocentro es H .

— *Hallar el lugar geométrico del punto medio de uno de los lados del triángulo.*

— *Caracterizar dicho lugar geométrico.*

Este enunciado ha sido ligeramente modificado, ya que puede ocurrir que no se puedan construir ningún triángulo inscrito en una circunferencia dada Γ y que tengan ortocentro en un punto dado en H : No se puede construir si $|PH - PO| < R$, donde P es un punto cualquiera de Γ , O su centro y R su radio. Ver

<http://www.gt.matfun.ull.es/angel/pdf/ejct2087.pdf>.



Observemos, en primer lugar, que si se prolonga la altura AH de $\widehat{ABC}$ hasta L , en la circunferencia circunscrita Γ , el lado BC es la mediatriz de HL .

En efecto, si D, E y F son los pies de las alturas desde A, B y C (respectivamente), los ángulos $\widehat{CBL}$ y $\widehat{CAL}$, inscritos en Γ , son iguales al abarcar el mismo arco. También, los ángulos $\widehat{CAD}$ y $\widehat{CBE}$ son iguales, pues los lados de uno son perpendiculares a los del otro. Luego, BD es a la vez bisectriz y altura en el triángulo BHL ; en consecuencia, D es el punto medio del segmento HL y BC es su mediatriz.

La misma propiedad la poseen las otras dos alturas de $\widehat{ABC}$.

Cualquier triángulo inscrito en Γ , con ortocentro en H , va a tener esta propiedad. Luego, para construirlos basta tomar un vértice en un punto genérico P en Γ y su lado opuesto va a ser la mediatriz del segmento HQ , siendo Q el otro punto donde la recta PH corta a Γ .

Sea el punto $P(a^2(t-1) : b^2t : c^2(t-1))$, en coordenadas baricéntricas homogéneas, sobre la circunferencia circunscrita, $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$, al triángulo de referencia $\widehat{ABC}$. Un punto genérico sobre la recta PH ($H(S_B S_C :$

$S_C S_A : S_A S_B$) el ortocentro de $\widehat{ABC}$ tiene por coordenadas

$$\begin{aligned} & \left(a^2(t-1)t(1-\mu)S^2 + S_B S_C ((t-1)ta^2 - c^2(t-1) + b^2t) \mu : \right. \\ & \quad b^2t(1-\mu)S^2 + S_A S_C ((t-1)ta^2 - c^2(t-1) + b^2t) \mu : \\ & \quad \left. S_A S_B ((t-1)ta^2 - c^2(t-1) + b^2t) \mu - c^2 S^2(t-1)(1-\mu) \right), \end{aligned}$$

donde

$$S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}, \quad S_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad S^2 = S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B,$$

siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$.

El otro punto Q de intersección de la recta PH con la circunferencia circunscrita tiene las coordenadas

$$\begin{aligned} & Q \left(S_B S_C (a^2 S_A t + c^2 S_C) (-a^2 S_A(t-1) + b^2 S_B) : \right. \\ & \quad -S_A S_C (-a^2 S_A(t-1) + b^2 S_B) (b^2 S_B t + c^2 S_C(t-1)) : \\ & \quad \left. S_A S_B (a^2 S_A t + c^2 S_C) (b^2 S_B t + c^2 S_C(t-1)) \right) \end{aligned}$$

La mediatriz ℓ de HQ es

$$\ell \equiv a^2 S_A(t-1)tx + b^2 S_B ty - c^2 S_C(t-1)z = 0.$$

La recta que pasa por el circuncentro O de $\widehat{ABC}$ y es perpendicular a ℓ , corta a ésta en el punto medio de la cuerda que determina en Γ . Dicha recta perpendicular tiene por ecuación:

$$\begin{aligned} p \equiv & \left(-c^4(a^2 + b^2 - c^2) + (-a^4 b^2 + 2a^2 b^4 - b^6 + a^4 c^2 + b^4 c^2 + b^2 c^4 - c^6)t + a^2(b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)t^2 \right) x + \\ & \left(c^4(a^2 + b^2 - c^2) + (c^2 - a^2)(a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 - 2b^2 c^2 + c^4)t + a^4(a^2 - b^2 - c^2)t^2 \right) y + \\ & \left(c^2(b^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (a^6 - a^4 b^2 - a^2 b^4 + b^6 - 2b^4 c^2 - a^2 c^4 + b^2 c^4)t + a^4(-a^2 + b^2 + c^2)t^2 \right) z = 0. \end{aligned}$$

Estas rectas, ℓ y p , se cortan en

$$X(c^2 + (b^2 - c^2)t : c^2 - (a^2 + c^2)t + a^2 t^2 : (b^2 - a^2) + a^2 t^2).$$

El lugar geométrico que describe este punto es el pedido, que resulta ser la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$:

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - \frac{1}{2}(x + y + z)(S_A x + S_B y + S_C z) = 0,$$

que pasa por los puntos medios de los lados y por los pies de las alturas de $\widehat{ABC}$.

Nota adicional.- La envolvente de los triángulos inscritos en Γ , con ortocentro en H , es una elipse (cuando H es interior a Γ , es decir, cuando $\widehat{ABC}$ es acutángulo), de focos en O y H ; su centro (punto medio de OH) es el centro N de la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$. La circunferencia focal (relativa al foco O) de esta elipse es Γ y la circunferencia principal es la de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$. Luego, la perpendicular desde O a una tangente a la elipse, corta a dicha tangente en un punto de la circunferencia de los nueve puntos, y dicho punto es el punto medio de la cuerda que la tangente determina en la circunferencia focal de O . (<http://www.gt.matfun.ull.es/angel/pdf/ejtr1880.pdf>).