

Propiedades de los triángulos ABC con $A = 60^\circ$.

Vicente Vicario García expone en su solución del problema 419 del Laboratorio Virtual de Triángulos una serie de propiedades de los triángulos ABC cuyo ángulo A es de 60° y plantea en qué casos se cumple el recíproco.

Las propiedades citadas son:

1. El centro N de la circunferencia de los nueve puntos pertenece a la bisectriz interior del ángulo A .

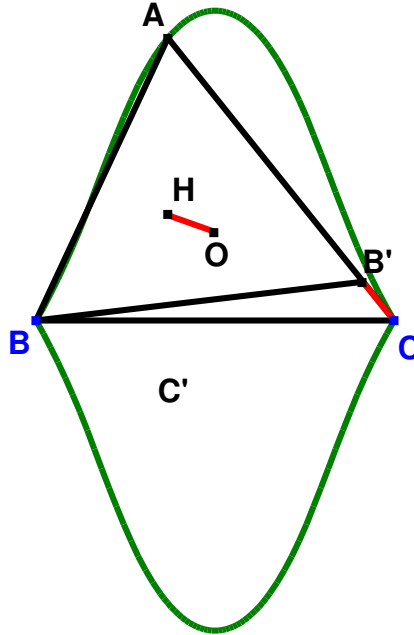
Esto ocurre exactamente cuando $A = 60^\circ$ o cuando el triángulo ABC es isósceles en A .

2. El punto de Feuerbach F es el punto medio de AI .

Esto ocurre si y solo si $A = 60^\circ$.

3. $OH = |b - c|$

Esto ocurre cuando $A = 60^\circ$ y también cuando los lados a , b y c cumplen la relación $a^4 + (b^2 - 3bc + c^2)a^2 - 2(b^2 - c^2)^2 = 0$.



Podemos visualizar todos estos triángulos considerando $B = (-1, 0)$, $C = (1, 0)$ y $A = (x, y)$ variable, y entonces hacemos las sustituciones

$$a \rightarrow 2, \quad b \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad c \rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2},$$

resultando una expresión en x e y igualada a 0, cuya gráfica serán las posibles posiciones del punto A .

4. $s = \sqrt{3}(R + r) = \sqrt{3}r_a$.

Aquí podemos considerar tres igualdades.

La igualdad $s = \sqrt{3}(R + r)$, que es simétrica respecto de A , B y C se cumple cuando cualquiera de los tres ángulos mide 60° . Cada una de las otras dos igualdades, $R + r = r_a$ y $s = \sqrt{3}r_a$, se cumple si y solo si $A = 60^\circ$.

5. $R = AH$.

Esta propiedad es cierta tanto si $A = 60^\circ$ como si $A = 120^\circ$.

6. $AI = 2r$.

Esta propiedad es cierta si y solo si $A = 60^\circ$.

7. $\cos B = \frac{2c - b}{2a}$, $\cos C = \frac{2b - c}{2a}$.

Cada una de estas propiedades es cierta si y solo si si y solo si $A = 60^\circ$.

8. $NI \perp OH$.

Esta propiedad, que es simétrica respecto de A , B y C se cumple cuando cualquiera de los tres ángulos mide 60° .

9. $a^2 + b^2 + c^2 = 6R^2 + 4r(R + r)$.

Esta propiedad, que es simétrica respecto de A , B y C se cumple cuando cualquiera de los tres ángulos mide 60° .

10. $3(b^2 + c^2) = 4(h_b^2 + h_c^2)$

Esta propiedad es cierta tanto si $A = 60^\circ$ como si $A = 120^\circ$.

Francisco Javier García Capitán, 2007.

Referencias

Francisco Bellot Rosado: Triángulos Especiales (2). Disponible en <http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero18/Triangespec2.pdf>