

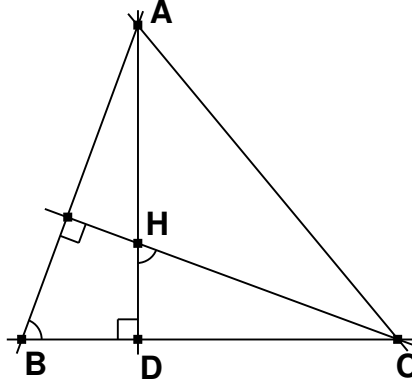
Problema 420 de triángulos cabri. Sean O, I, H el circuncentro, incentro y ortocentro, respectivamente, de un triángulo acutángulo ABC . Para un punto P interior al triángulo, $f(P)$ representa la suma de las distancias del punto P a los lados del triángulo. Demostrar que se tienen las desigualdades $f(H) \leq f(I) \leq f(O)$.

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Cálculo de $f(H)$

Supongamos que la altura AH corta en D a la recta BC . Tenemos:



$$HD = DC \cdot \cot B = (b \cos C) \cdot \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} \cos B \cos C = 2R \cos B \cos C.$$

Sumando las expresiones análogas para los segmentos correspondientes a los otros lados tenemos que

$$f(H) = 2R (\cos B \cos C + \cos C \cos A + \cos A \cos B).$$

Usando el teorema del coseno,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

y operando obtenemos

$$f(H) = 2R \cdot \frac{\lambda}{4a^2b^2c^2} = R \cdot \frac{\lambda}{2a^2b^2c^2}$$

siendo

$$\lambda = a^4bc + abc^4 + ab^4c + 2a^3b^3 + 2a^3c^3 + 2b^3c^3 - ba^5 - ca^5 - b^5a - c^5a - bc^5 - b^5c,$$

un polinomio simétrico en a, b, c .

Para obtener una expresión más amable, usamos los polinomios simétricos elementales en a, b, c ,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= a + b + c = 2s, \\ \sigma_2 &= ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr, \\ \sigma_3 &= abc = 4Rrs,\end{aligned}$$

y así obtenemos:

$$\begin{aligned}f(H) &= R \cdot \frac{-\sigma_1^4\sigma_2 + 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - 16\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_3^2}{2\sigma_3^2} = \\ &= R \cdot \frac{r^2 - 4R^2 + s^2}{2R^2} = \\ &= \frac{r^2 - 4R^2 + s^2}{2R}.\end{aligned}$$

Cálculo de $f(I)$

Evidentemente $f(I) = 3r$.

Cálculo de $f(O)$

En primer lugar, $f(O) = R \cos A + R \cos B + R \cos C$. Haciendo

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - a^3 - b^3 - c^3}{2abc} \\ &= \frac{-\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 6\sigma_3}{2\sigma_3} \\ &= \frac{R + r}{R}\end{aligned}$$

obtenemos que $f(O) = R + r$.

La desigualdad $f(H) \leq f(I)$

Esta desigualdad equivale a

$$\frac{r^2 + s^2 - 4R^2}{2R} \leq 3r \Leftrightarrow \frac{4R^2 + 6Rr - r^2 - s^2}{2R} \geq 0.$$

Para demostrar esta desigualdad volvemos a expresar R , r y s en términos de a , b y c y llegamos a la desigualdad equivalente:

$$\sum_{\sigma} a^5 b + 3 \sum_{\sigma} a^3 b^2 c \geq 2 \sum_{\sigma} a^4 b c + \sum_{\sigma} a^3 b^3 + \sum_{\sigma} a^2 b^2 c^2. \quad (1)$$

Recordemos que al usar el símbolo $\sum_{\sigma}$ indicamos que la suma se hace recorriendo todas las permutaciones de (a, b, c) , contando las repeticiones. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} a^5 b &= a^5 b + a^5 c + b^5 a + b^5 c + c^5 a + c^5 b, \\ \sum_{\sigma} a^4 b c &= 2a^4 b c + 2b^4 c a + 2c^4 a b, \\ \sum_{\sigma} a^2 b^2 c^2 &= 6a^2 b^2 c^2. \end{aligned}$$

La desigualdad (1) se escribe con la notación del teorema de Muirhead

$$[5, 1, 0] + 3[3, 2, 1] \geq [3, 3, 0] + 2[4, 1, 1] + [2, 2, 2],$$

y el teorema no se puede aplicar en este caso, ya que los términos de la izquierda no mayoran a los de la derecha. Sin embargo, si hacemos las sustituciones de Ravi ($a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$), resulta la desigualdad equivalente

$$[4, 2, 0] + [3, 3, 0] \geq [4, 1, 1] + [2, 2, 2],$$

desigualdad que sí se deduce del teorema de Muirhead, ya que aquí tenemos $[4, 2, 0] \geq [4, 1, 1]$ y $[3, 3, 0] \geq [2, 2, 0]$. La igualdad será cierta cuando las variables sean todas iguales, es decir cuando el triángulo sea equilátero.

La desigualdad $f(I) \leq f(O)$

Esta desigualdad equivale a $3r \leq R + r$, o $2r \leq R$, que es la desigualdad de Euler, con igualdad si y solo si el triángulo es equilátero.

Sobre el teorema de Muirhead

El teorema de Muirhead es muy útil para resolver desigualdades como las que ha aparecido aquí, en la que intervienen polinomios homogéneos simétricos cuyas variables son los lados de un triángulo.

Esto es sólo una pequeña introducción. Para saber más, consultar las referencias siguientes:

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. Inequalities, págs 44-45.

[2] Stanley Rabinowitz, On the Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities.

Consideremos los símbolos $[5, 0, 0]$, $[3, 1, 1]$, $[4, 1, 1]$ todos los con la misma suma y formados por tres números decrecientes. Decimos que un símbolo $[i_2, j_2, k_2]$ mayor a otro símbolo $[i_1, j_1, k_1]$ si

1. $i_2 \geq i_1$,
2. $i_2 + j_2 \geq i_1 + j_1$.

Escribiremos $[i_2, j_2, k_2] \geq [i_1, j_1, k_1]$. En nuestro ejemplo tenemos que $[5, 0, 0] \geq [4, 1, 0] \geq [3, 1, 1]$.

El *teorema de Muirhead* dice que un símbolo mayor a otro si y solo si la desigualdad correspondiente se cumple para todos los valores positivos de las variables y que la igualdad se cumple si y solo si las variables son todas iguales.